REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

10.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática A

INTRODUÇÃO

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico (EB) e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.
A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas matemáticas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, estas Aprendizagens Essenciais exploram modelos matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática A promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no Ensino Secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferenciadas trabalhem temas matemáticos diferentes, podendo em algumas turmas, caso o tempo o permita, ser lecionado mais do que um dos temas opcionais propostos.

- Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração devem ser adequados ao trabalho desenvolvido em cada tema. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

3. Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

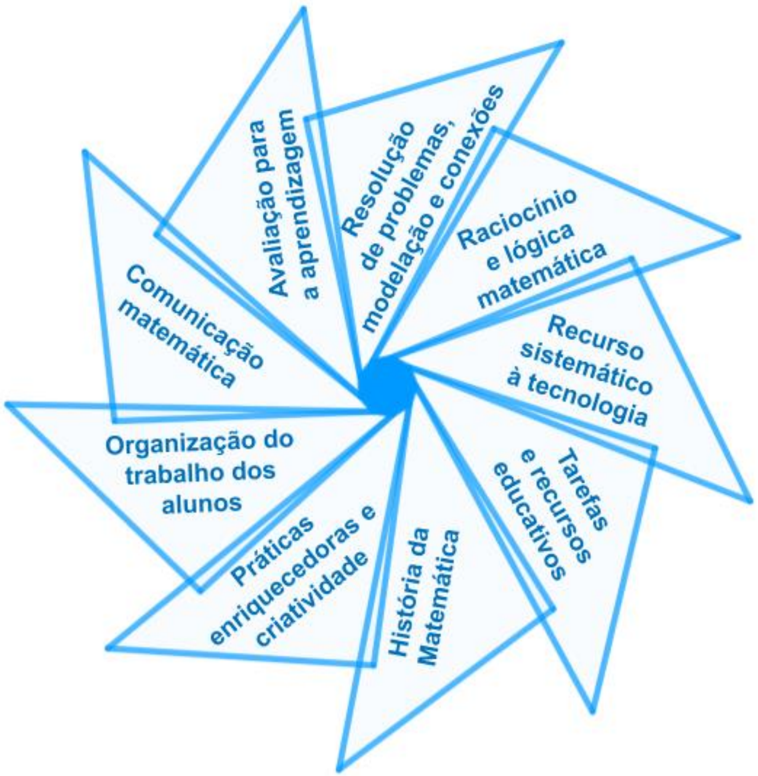

Figura 1 – Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a explorar situações problemáticas, a usar abordagens heurísticas, a formular e validar conjeturas, a justificar processos de resolução e a encadear raciocínios. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

5) História da Matemática

Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, a evolução das epidemias ou a exploração espacial.

6) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM – ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

7) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

8) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

9) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas *Modelos Matemáticos para a Cidadania* e *Estatística*. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam *Geometria* e *Funções* numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram *Geometria*, *Matemática Discreta* e *Funções*. No tema Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões. O estudo das funções considera sempre a abordagem dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico.

No 12.º ano é abordado o tema *Números Complexos* e são aprofundados os temas *Probabilidade* e *Funções*. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12.º ano são propostos três temas em alternativa: *Inferência Estatística*, *Primitivas Imediatas e Integrais Definidos* e *Matrizes*. Deve ser escolhido um destes temas para cada turma da escola, podendo essa escolha variar de turma para turma. Se o tempo o permitir, pode ser trabalhado mais do que um tema opcional.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. No 10.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Estatística, Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria sintética e Funções. No 11.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Matemática Discreta (Sucessões), Geometria e Funções. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos, podendo em alternativa ser desenvolvida outra proposta de trabalho, em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A, dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos. São também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.
- *Áreas de competência do perfil dos alunos*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica, nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados nestas Aprendizagens Essenciais constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com cinco tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Modelos matemáticos para a cidadania	Modelos matemáticos nas eleições	5	4
	Modelos matemáticos na partilha	5	
	Modelos matemáticos em finanças	10	
Estatística	Problema estatístico e População e amostra	2	6
	Dados univariados	15	
	Dados bivariados	8	
	[Trabalho de projeto]	5	
Geometria sintética no plano	Pontos notáveis do triângulo	8	3
	Reta de Euler	4	
	Circunferência dos 9 pontos	3	
Funções	Generalidades acerca de funções	5	6
	Funções polinomiais de grau não superior a 2	20	
	Funções definidas por ramos	5	
Geometria analítica no plano e no espaço	Geometria analítica no plano	15	9
	Geometria analítica no espaço	10	
	Vetores no plano e no espaço	20	
		Total	28

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO **PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)**

- **A** Linguagens e textos
- **B** Informação e comunicação
- **C** Raciocínio e resolução de problemas
- **D** Pensamento crítico e pensamento criativo
- **E** Relacionamento interpessoal
- **F** Desenvolvimento pessoal e autonomia
- **G** Bem-estar, saúde e ambiente
- **H** Sensibilidade estética e artística
- **I** Saber científico, técnico e tecnológico
- **J** Consciência e domínio do corpo

OPERACIONALIZAÇÃO DAS **APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)**

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA Modelos matemáticos nas eleições Maioria simples Maioria absoluta Método de Borda	Reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais. Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva. Identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta. Identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).	Contribuir para o reconhecimento da necessidade da matemática para definir métodos eleitorais. Contribuir para a clarificação da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, estruturas sindicais e poderes políticos). Promover a análise, a interpretação e a discussão de sistemas eleitorais que valorizem a existência de uma segunda volta, como é o caso da eleição do Presidente da República de Portugal, nomeadamente a referência à eleição presidencial de 1986. Propor a construção de um programa simples em *Python*, de iniciação à linguagem, que permita determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações em 3 candidatos. Propor a análise de situações que evidenciem claramente o facto de métodos eleitorais diferentes gerarem escolhas diferentes para a mesma votação, recorrendo a contextos eleitorais concretos, como por exemplo: - eleição do delegado de turma;	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B)

		- eleição para a Associação de Estudantes; - eleições para os órgãos sociais de clubes desportivos. Referir que todos os métodos eleitorais têm limitações, nomeadamente, encorajar o debate de situações em que existe e em que não existe transitividade das escolhas.	Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
Modelos matemáticos na partilha Método de Hondt Método de St. Laguë	Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para fazer distribuições proporcionais. Conhecer e aplicar o método de Hondt e o método de St. Laguë. Identificar vantagens e limitações dos métodos de Hondt e St. Laguë.	Analisar com os alunos os contextos eleitorais das eleições autárquicas e das eleições para a Assembleia da República, suscitando a compreensão da necessidade de um método de partilha proporcional. Incentivar os alunos a confirmar o processo da distribuição de mandatos num organismo local (eleições com um número reduzido de mandatos - até 6 mandatos). Promover a exploração, com recurso à tecnologia gráfica (folha de cálculo), de distribuições de mandatos em cenários nacionais (eleições com um número elevado de mandatos, por exemplo, a distribuição de mandatos por círculo eleitoral). Propor a análise de situações concretas que evidenciem claramente que métodos de partilha diferentes geram distribuições diferentes para a mesma eleição, por exemplo, as eleições europeias de 1987. Promover a análise de casos em outras situações, como por exemplo, a distribuição de um número de computadores por departamentos com diferentes dimensões. Promover discussões sobre problemas de partilha, identificando os modelos matemáticos que contribuem para as diversas soluções e limitações na sua aplicação.	

Modelos matemáticos em finanças Matemática nos salários	Calcular o valor dos salários mensal, anual e por hora, dadas as condições de um contrato. Reconhecer as diferenças entre salário bruto e salário líquido. Calcular contribuições obrigatórias para sistemas de segurança social. Calcular a retenção na fonte para IRS. Calcular o IRS anual em casos simples em função do rendimento coletável. Compreender o caráter provisório da taxa mensal de retenção na fonte (IRS). Identificar a progressividade do IRS e a relevância dos escalões.	Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos), promovendo a construção de uma folha de cálculo. Sugerir em grande grupo: - uma discussão que inclua a identificação de diferentes formas de referência aos rendimentos e dificuldades de comparação (ex: rendimento anual, salário mensal, rendimento por hora); - a análise de exemplos relacionados com o processamento dos vencimentos (ex: recibos); - a pesquisa e análise de tabelas de IRS, identificação dos escalões aplicáveis e discussão sobre a progressividade deste imposto.	Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Matemática na poupança e no crédito	Calcular o juro simples e o juro composto (com diferentes períodos de capitalização dos juros).	Promover, com recurso à tecnologia, o cálculo de juros simples e compostos em diferentes situações. Promover a aplicação da fórmula $j = Ci \times r \times n$ para o cálculo do juro simples (Ci = capital inicial, r = taxa de juro anual e n = número de anos) e da fórmula de cálculo de juro composto $Cf = Ci \times (1+r)^n$ (Ci = capital inicial, Cf = capital final, r = taxa de juro anual e n = número de anos). Para uma capitalização mensal, dada a taxa anual r, aplicar a fórmula $Cf = Ci \times \left(1+\frac{r}{12}\right)^n$, onde n é o número de meses.	

		Propor a construção de um programa simples em *Python* que permita determinar o cálculo de juros simples e o cálculo de juros compostos. Analisar a rentabilidade de diferentes depósitos a prazo, durante um prazo predefinido, recorrendo à folha de cálculo e ao uso de simuladores disponíveis na Internet. Promover, em casos simples, o cálculo de: - capital inicial a depositar para, ao fim de um dado tempo, ter um certo capital final com uma taxa de juro fixa; - tempo mínimo de capitalização, dados os capitais inicial e final e a taxa de juro.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor nos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser encorajados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.
Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos (270 para o candidato A, 153 votos para o candidato B e 201 para o candidato C).

```
cA=270
cB=153
cC=201
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print(ma)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

A conclusão é que para obter maioria absoluta são precisos ma votos. Algum dos candidatos ultrapassou esse valor?
Numa possível extensão a este programa poderá ser verificado se algum dos candidatos obteve maioria absoluta.

Exemplo de programa em *Python* que permite, sendo inseridas as votações de 3 candidatos, determinar o número de votos que garante a maioria absoluta e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
    print("O candidato A obteve maioria absoluta com",cA,"votos.")
elif cB>=ma:
    print("O candidato B obteve maioria absoluta com",cB,"votos.")
elif cC>=ma:
    print("O candidato C obteve maioria absoluta com",cC,"votos.")
else:
    print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Em alternativa à folha de cálculo, as simulações referentes à distribuição de mandatos pelo método de Hondt poderão ser realizadas através de pequenos programas em *Python*, procurando por exemplo o número mínimo e máximo de votos para um partido obter um número predeterminado de lugares (por exemplo, todos os mandatos serem atribuídos ao mesmo partido). Uma simulação do método de Hondt pode ser encontrada em: https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx

Podem propor-se vários tipos de programas em *Python* para concretizar os Modelos Financeiros; por exemplo o cálculo de uma capitalização anual ou uma capitalização mensal, dado um capital inicial.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização anual, dado um capital inicial:

```
ci=1000    #valor inicial
r=0.03     #taxa de juro anual
cf=ci+ci*r
print('O capital final é ',cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização mensal passados n meses, dado um capital inicial:

```
ci=300      #valor inicial
r=0.03      #taxa de juro anual
n=10        #número de períodos de capitalização
cf=ci*(1+r/12)**n
print('O valor final ao fim de ',n,' meses é', cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação da periodicidade e do número de períodos de capitalização.

Possíveis aprofundamentos

Se for possível e oportuno, poderão ser abordados outros métodos eleitorais como, por exemplo, o método de Condorcet e a sua alegada proposta (em 1888) de um método eleitoral superior a todos os outros.
Exemplo de um caso interessante a estudar: a mudança do uso de maioria simples para a maioria absoluta ao longo dos anos na Ordem dos Médicos e na Ordem dos Advogados.
Também pode ser feita a comparação com o método usado nas eleições para a Ordem dos Enfermeiros em que a lista vencedora é a que obtiver mais votos, sem exigência de maioria absoluta (e só com uma volta). Neste último caso pode ser consultada a página https://www.ordemenfermeiros.pt/arquivo/comunicacao/Paginas/ProclamacaoEleicoes onde se encontra a proclamação dos resultados definitivos das Eleições de 12 de dezembro de 2011.
Avaliação financeira de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos.
Cálculo das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras.
Para os alunos de Ciências Sócio Económicas será recomendável que sejam fomentadas as conexões com assuntos e conceitos da disciplina de Economia.

Bibliografia de referência

Aspas, R. (2020). *Tipos de impostos: diretos e indiretos*. Obtido de https://www.doutorfinancas.pt/financas-pessoais/impostos-em-portugal-diretos-e-indiretos/
Batista, A. S. (2014). *Matemática financeira. O valor do dinheiro ao longo do tempo*. Porto: Vida económica.
Chalub, F. (2019). O ano de todas as eleições. *Gazeta de Matemática*, nº 188, p. 9-11.
CNE, *Eleições / Referendos*. Obtido de: https://www.cne.pt/content/eleicoes-referendos
CNE, *Método de Hondt*. Obtido de https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt
COMAP (2016). *For all Practical Purposes - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Lisboa: Banco de Portugal.
Domingos, A., Santiago, A, & Teixeira, P. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Perfis financeiros, *Educação & Matemática*, nº 142, p. 13-14.

Feiteira, R. (2007). O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas? *Gazeta de Matemática*, nº 152, p. 32-37.
Feiteira, R. (2008). Alguns métodos eleitorais através do Excel, *Educação & Matemática*, nº 96, p. 29-33.
Gonçalves, D. (2019). *Quais os Impostos cobrados na compra de uma casa?* Obtido de https://www.doutorfinancas.pt/creditos/credito-habitacao/quais-os-impostos-cobrados-na-compra-de-uma-casa/
Junior, I. M. (2021). *Educação Financeira*. IMPA. Obtido de https://umlivroaberto.org/producao/educacao-financeira/
Lopes, A. V. & Moreirinha, O. (2004). Materiais para a Aula de Matemática - Métodos de apoio à decisão: Plínio, o jovem. *Educação & Matemática*, nº 79, p. 25.
Lopes, A. V. et al. (2002). Materiais para a aula de Matemática - Eleições para a Presidência da República -1986. *Educação & Matemática*, nº 67, p. 34-35.
Machado, H. A. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal. Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Técnica de Lisboa.
Malkevitch, J. (1999). *Teoria Matemática das Eleições*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online
Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*, Obtido de: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf
Nascimento, N. H. A. (2015). *Matemática e educação financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa. Obtido de http://hdl.handle.net/10362/16356
Pinto, D. V. & Domingos, A. (2015). A Educação Financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática*, (pp. 121). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.
Pordata / RTP (2015). *O que é a dívida pública?* Obtido de https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-e-a-divida-publica/
Pordata / RTP (2015). *O que são impostos diretos e indiretos?* Obtido de https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-sao-impostos-diretos-e-indiretos/
Ribeiro, E. M. C. (2013). *Literacia Financeira. Estudo aplicado aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Portucalense Infante D. Henrique.
Rodrigues, A. & Pimenta, C. (2017). *Literacia financeira – construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12º ano de escolaridade)*. *CIBEM 2017* (Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática) CB-219, p. 74-84. Madrid: Universidade Complutense.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
ESTATÍSTICA Problema estatístico Variabilidade	Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento. Reconhecer a variabilidade como um conceito chave de um problema estatístico. Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente.	Promover a discussão na turma para identificar e formular questões estatísticas, cujas respostas dependam da recolha de dados. Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, o político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam diariamente na escola; o padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir.	Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)
População, amostra e variável Fases de um procedimento estatístico	Identificar num estudo estatístico, população, amostra e a(s) caraterística(s) a estudar, que se designa(m) por variável (variáveis). Reconhecer as fases de um procedimento estatístico: - Produção ou aquisição de dados; - Organização e representação de dados; - Interpretação tendo por base as representações obtidas. Reconhecer os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras	Alertar que os termos população e amostra se referem a conjuntos de unidades estatísticas, mas que estes termos também são usados para identificar os conjuntos de valores assumidos pela variável em estudo. Propor a recolha de informação nos jornais ou na internet sobre notícias que permitam: - diferenciar os processos de recenseamento e sondagem (recolher dados sobre toda a população ou sobre uma amostra); - identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária. Alertar para a necessidade de recolha de dados reais, como forma de responder a questões concretas. Promover a discussão sobre a dimensão da amostra a recolher, informando que esta dimensão depende muito da variabilidade	

	enviesadas cujo estudo levaria a inferir conclusões erradas para as populações. Intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras para inferir para a população subjacente, não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como verdadeiro ou falso.	presente na população subjacente e deverá ser tanto maior quanto maior for a dimensão da população. Informar que existem técnicas para definir quais as dimensões mínimas para garantir a precisão dos processos em que se pretende inferir para a população as propriedades verificadas na amostra. Chamar a atenção para que existem processos apropriados para a seleção das amostras de forma a garantir a aleatoriedade e a representatividade da população subjacente. Informar que a utilização da probabilidade vai permitir tomar uma decisão para a população, a partir do estudo da amostra, quantificando o erro cometido ou o grau de confiança nessa decisão, exemplificando com a forma como se transmite o resultado de uma sondagem eleitoral.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)
Dados univariados Dados quantitativos discretos ou contínuos	Identificar dados quantitativos discretos ou contínuos.	Informar que quando se está a recolher dados quantitativos, isto é, a "medir" a variável em estudo sobre as unidades estatísticas seleccionadas para a amostra, confrontamo-nos com duas situações: ou a variável assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos, caso em que se diz *discreta*, e a observação assume a forma de uma *contagem*; ou a variável pode assumir qualquer valor num intervalo em R, caso e que se diz *contínua*, e a observação assume a forma de uma *medição*. Salientar que a natureza dos dados não é uma caraterística necessariamente inerente à variável em estudo, porque pode depender da forma como é medida. Exemplificar com a variável Idade que é de tipo contínuo e que pode ser utilizada de forma discreta (10, 15, 23,...), uma peça de roupa, cujo "tamanho" é uma variável contínua, mas é frequentemente classificada em categorias (XS, S, M, L, XL, ...), isto é, dados de tipo qualitativo.	Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G)

Organização de dados	Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las. Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, relembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis.	Promover a utilização da tecnologia para construir tabelas e gráficos. Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados e salientar a importância do diagrama de extremos-e-quartis para comparar várias distribuições de dados.	Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Histograma	Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos. Construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.	Salientar que o aspeto do histograma depende do número de classes considerado, da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para que uma representação com muitas classes apresentará muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto que um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão). Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra, respetivamente discreto ou contínuo.	
Medidas de localização	Interpretar as medidas de localização: média ($\bar{x}$), mediana (M_e), moda(s) (M_o) e percentis (quartis como caso especial) na caraterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.	Incentivar a utilização da tecnologia para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.	
Medidas de dispersão	Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, s, (variância amostral s^2) na caraterização da distribuição dos dados,	Propor a elaboração de um programa simples em *Python* que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de	

	relacionando-as com as representações gráficas obtidas.	uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo.	
Propriedades das medidas	Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “*a*” e pela adição de uma constante “*b*”. Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas: - Pouca resistência da média e do desvio padrão; - Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade; Conhecer que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão. Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar, como medida de localização do centro da distribuição dos dados, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples. Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o	Promover a utilização da tecnologia para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “*a*” e pela adição de uma constante “*b*”. Realçar a utilização enganadora da média, em casos em que existem *outliers* (dados muito diferentes do padrão dos restantes), devido à grande influência desses dados. Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados dessas medidas. Promover a utilização da tecnologia para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da Direção Geral de Saúde (https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf), relacionando o “peso” e a “estatura” com a “idade”. Promover a elaboração de um programa em *Python* para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados. Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema, que levou à recolha dos dados.	

	diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc.		
Dados bivariados Dados quantitativos	Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis quantitativas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se uma amostra de pares de dados.	Conduzir os alunos a explorar situações em que tenha interesse estudar a associação entre duas variáveis sobre as mesmas unidades estatísticas. Envolver os alunos na discussão sobre a construção do diagrama de dispersão, em especial na identificação da variável independente ou explanatória. Por exemplo, pretendendo-se estudar a associação entre as variáveis "idade" e "altura", a variável independente ou explanatória deverá ser a "idade" e a variável "altura" a variável dependente ou resposta.	
Diagrama de dispersão	Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, direção e força da associação (linear) entre as duas variáveis.		
Coeficiente de correlação linear	Identificar o coeficiente de correlação linear r, como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores pertencentes a $[-1, 1]$, dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula. Recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear.	Apresentar a expressão do coeficiente de correlação e utilizá-la para interpretar a associação linear entre as variáveis como positiva, negativa ou nula. Realçar que o coeficiente de correlação só assume os valores -1 ou 1, quando os pontos no diagrama de dispersão estão alinhados numa reta.	
Reta de regressão - variável independente ou explanatória	Compreender que no caso do diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados. Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão.	Realçar e exemplificar que a correlação linear só mede a associação linear entre as variáveis, já que o coeficiente de correlação pode ser próximo de zero e as variáveis estarem fortemente correlacionadas, não linearmente.	

- variável dependente ou resposta.	Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou *explanatória*. Compreender que a existência de *outliers* influencia estes procedimentos. Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados. Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis "perturbadoras" que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo.	Realçar que só no caso de se visualizar uma associação aproximadamente linear entre os pontos do diagrama de dispersão é que tem sentido utilizar a tecnologia para calcular o coeficiente de correlação, bem como construir a reta de regressão. Comentar com os alunos a razão de se chamar à reta de regressão, reta dos mínimos quadrados. Propor a construção da reta de regressão, recorrendo à tecnologia e explorar a forma como é afetada por *outliers*. Exemplificar com os chamados "conjuntos de dados de Anscombe", que embora apresentem as mesmas caraterísticas amostrais, têm representações gráficas muito diferentes, realçando a importância de uma visualização prévia dos dados antes de proceder ao cálculo do coeficiente de correlação ou à construção da reta de regressão. Explorar o modelo da reta de regressão no contexto do estudo, nomeadamente inferindo valores da variável resposta para determinados valores para a variável explanatória. Propor a pesquisa na internet de situações em que existem variáveis "perturbadoras".	
Gráfico de linhas	Entender que um gráfico de linhas é um caso particular de um diagrama de dispersão, em que se pretende estudar a evolução de uma das variáveis relativamente a outra variável, de um modo geral o tempo, e em que se unem, por linhas, os pontos representados.	Promover a exploração de alguns exemplos concretos de gráficos de linhas, como a evolução da temperatura medida numa determinada hora, ao longo de um mês, em determinado local.	

Aprofundamento do estudo de Estatística com trabalho de projeto (*)	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Estatística num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e construir modelos presentes na Estatística, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - A minha região em números! O que diz o Censos 2021…; - A nossa Cantina Escolar em números!; - O Papel da Mulher na Sociedade; - Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não?; - Como estão os nossos oceanos? (Plasticus maritimus, Planeta tangerina,...); - Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos? Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	
(*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 10.º ano tal como é exemplificado nas propostas apresentadas abaixo.			

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* que permite calcular a média, a mediana, o máximo e o mínimo das idades de 5 alunos de uma turma:

```
idades=[14,16,14,15,17]
idades.sort()
soma=0
for i in range(5):
      soma=soma+idades[i]
print('Idades:',idades)
print('Media:',soma/5)
print('Mediana:',idades[2])
print('Máximo:',idades[4])
print('Mínimo:',idades[0])
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possível extensão poderá propor-se aos alunos uma generalização do programa de modo que a dimensão da lista possa ser variável. Sugere-se a utilização da função *len()* que permitirá determinar o número de elementos da lista.
Exemplo de programa em *Python* que permita determinar o desvio-padrão e a amplitude de uma lista de idades com um n.º de elementos variável:

```
import math
idades=[14,16,14,15,17,23]
idades.sort()
n=len(idades)
soma=0
for i in range(n):
      soma=soma+idades[i]
media=soma/n
desvios=0
for i in range(n):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=math.sqrt(desvios/n)
amplitude=idades[n-1]-idades[0]
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Amplitude:', amplitude)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Explorar a utilização de tabelas de contingência (tabelas de dupla entrada) para representar amostras de dados bivariados qualitativos. Ter em consideração que embora se fale de dados qualitativos, eles podem ser resultado da observação de variáveis quantitativas (Exemplo a variável Idade, que é quantitativa contínua, mas em que os dados podem ser apresentados em classes etárias, ou a variável *Tamanho de uma camisola*, que pode ser medida nas categorias XS, S, M, L, XL, 2XL ou 3XL). Considerar as distribuições marginais e as distribuições condicionais e explorar a possível associação entre as variáveis. Utilizar representações gráficas adequadas.
Explorar no contexto da correlação a existência de variáveis "perturbadoras", exemplificando.
Explorar diferentes tipos de amostragem que conduzam a amostras representativas das populações subjacentes, por oposição a processos que conduzam a amostras enviesadas.

Bibliografia de referência

ActivAlea – *Associação entre variáveis quantitativas. O coeficiente de correlação*. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt
ActivAlea – *Associação entre variáveis qualitativas*. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=ptwww.alea.pt
ALEA - *Noções de Estatística*, obtido de https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=131&Itemid=1203&lang=pt
COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Correlações espúrias. Obtido de http://tylervigen.com/spurious-correlations.
Graça Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.
Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online
Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.
Grupo de trabalho T3. (1999). Estatística e calculadoras gráficas. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
Martins, H. & Domingos, A. (2018). *Estatística no Secundário com Calculadora Gráfica*. Nova.Fct Editorial.
Moore, D. (2019). *STATISTICS Concepts and controversies*. New York: W.H.Freeman and Company.
Moore, D. et al. (2021). *The Basic Practice of Statistics*. New York: W.H.Freeman and Company.
Rossman, A. et al. (2011). *Workshop Statistics: Discovery with Data*. Hoboken, NJ: Wiley.

Proposta 1

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Modelos Matemáticos para a Cidadania com trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos Modelos Matemáticos para a Cidadania num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar Modelos Matemáticos importantes para a Cidadania, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Eleições com círculos eleitorais uninominais ou regionais versus um círculo nacional único; - Casos concretos de eleições com colégio eleitoral (Estados Unidos da América, Estónia, Índia,...); - Eleições com dados “falsificados” (Lei de Benford); - Estudo de diferentes modos de eleger uma Associação de Estudantes, um delegado ou um subdelegado das turmas da escola; - Análise de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos. - Cálculos das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Proposta 2

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Geometria sintética com trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria Sintética num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Geometria Sintética, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Exploração da Enciclopédia de pontos notáveis de um triângulo; - Secções num cubo; - Sólidos platónicos e sólidos arquimedianos; - Poliedros estrelados; - Estudo do primeiro livro dos Elementos de Euclides. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática sempre que for considerado relevante.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Proposta 3

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Funções com trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados às Funções num problema contextualizado, desenvolvendo competências de modelação, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes nas Funções, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser negociado ou escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Funções e gráficos de funções na comunicação social; - Funções ao longo da história (Oresme, Kepler, Newton,...); - Modelação de funções a partir de dados recolhidos com sensores; - Modelação de funções a partir de dados consultados na Internet (Pordata, INE, OCDE, UNESCO,...); - Funções associadas às viagens espaciais (Projeto ARTEMIS, Projeto DART,...). Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Bibliografia de referência (trabalhos de projeto)

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
Amado, N. & Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de: http://hdl.handle.net/10400.1/15482.
George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de: https://www.edutopia.org/project-based-learning.
Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de: http://hdl.handle.net/10400.1/6872.
Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
GEOMETRIA Geometria sintética no plano Pontos notáveis do triângulo: - Incentro - Circuncentro - Ortocentro - Baricentro	Definir e caracterizar: - incentro e circunferência inscrita (com demonstração); - circuncentro e circunferência circunscrita (com demonstração); - ortocentro; - baricentro. Conhecer propriedades das medianas e do baricentro: - as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes (com demonstração); - a distância do baricentro a qualquer dos vértices é $\frac{2}{3}$ da mediana respetiva (com demonstração); - o baricentro é o centro de massa (gravidade, geométrico) de um triângulo. Localizar os pontos notáveis em triângulos equiláteros, isósceles e escalenos e em triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos.	Promover explorações e construções a realizar pelos alunos, envolvendo pontos notáveis do triângulo, usando geometria dinâmica, para resolver problemas, perceber os conceitos, formular conjeturas, visualizar e testar propriedades. Desenvolver nos alunos o gosto pela argumentação em geral e pela demonstração como elemento central da matemática, como por exemplo a propósito da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita. Propor a resolução de problemas com pontos notáveis do triângulo, envolvendo os alunos em investigações/explorações (em pequenos grupos), visando a elaboração de pequenos relatórios, composições, pósteres ou outros.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

Reta de Euler Circunferência dos nove pontos	Verificar a existência da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos.	Propor a construção da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos, usando geometria dinâmica, permitindo aos alunos a exploração de situações extremas da localização dos pontos notáveis, por exemplo: num triângulo equilátero os quatro pontos notáveis são coincidentes; num triângulo retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto; num triângulo obtusângulo o circuncentro é exterior ao triângulo. Exibir relações métricas entre os pontos notáveis, por exemplo: a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro; o centro da circunferência de nove pontos é o ponto médio do segmento definido pelo circuncentro e pelo ortocentro; o raio da circunferência de nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Possíveis aprofundamentos

Poderão ser abordados outros temas para aprofundamento:
- estender o estudo a, pelo menos, outro ponto notável, envolvendo os alunos em atividades exploratórias com geometria dinâmica. Alguns exemplos de pontos notáveis: ponto de Fermat (ou ponto de Torricelli), ponto de Nagel, ponto de Miquel, ponto de Feuerbach, ponto de Gergonne (referência à Enciclopédia de pontos notáveis de um triângulo);
- resolver problemas das Olimpíadas de Matemática que envolvem pontos notáveis do triângulo;
- propor a elaboração de composições matemáticas sobre: a Geometria na "República" de Platão; a Geometria dos ORIGAMI; a Geometria dos templos japoneses.

Bibliografia de referência

ATRACTOR (s/d). Triângulos belos. Obtido de https://www.atractor.pt/mat/triangulos_belos/
Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática,* Ciência Aberta, Gradiva, Lisboa,
Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma Geogebra*. Obtido de https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7
Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta
Gonçalves, G. (2014). *Geometria do Triângulo*. Universidade de Brasília. Obtido de https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/16950/1/2014_GeorgeWesleyBarbalhoGon%C3%A7alves.pdf

Khan Academy. *Medianas e baricentros de triângulos*. Obtido de https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/triangle-properties/medians-centroids/v/triangle-medians-and-centroids
Kimberling, C. (2022). *Encyclopedia of Triangle Centers*. Obtido de https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html
Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Martins, A. e outros (2018). *Reta de Euler: Colinearidade dos ortocentro, baricentro e circuncentro de um triângulo*. Obtido de https://geometrias.blogspot.com/2018/02/reta-de-euler-colinearidade-dos.html
Rosário, N. (2008). *Aspectos Avançados da Geometria do Triângulo*. Universidade do Algarve. Obtido de https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/642/1/AspectosAvancadosGeometriaTriangulo.pdf
Sebastião e Silva, J. (1976). *A Matemática na Antiguidade*. SPM, Lisboa
SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
Silva, E. (2019). *Relações entre os pontos notáveis do triângulo e outras construções*. Universidade do Porto. Obtido de https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.show_file?pi_doc_id=205687
Veloso, E. (1998) *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
FUNÇÕES Generalidades acerca de funções Evolução histórica do conceito de função e formas de representação Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente Domínio, conjunto de chegada, contradomínio, variável independente e variável dependente	Analisar elementos da evolução histórica do conceito de função e as diversas formas de representação: diagramas, tabelas, gráficos e expressões analíticas. Identificar domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem de uma função em contextos históricos, de modelação, ou abstratos, com recurso a vários tipos de representações (tabelas, gráficos e expressões analíticas).	Apresentar elementos da evolução histórica do conceito de função, envolvendo episódios e problemas clássicos, como por exemplo, tabelas numéricas (quadrados, cubos, recíprocos, raízes quadradas e raízes cúbicas), tabelas trigonométricas de Ptolomeu/Copérnico ou lançamento de projéteis. Explorar o conceito de função em contextos reais e matemáticos em que faça sentido, nomeadamente como relação de covariação, incluindo a possibilidade de definição de funções em ambientes gráficos (calculadoras gráficas ou Geogebra) ou em ambientes de programação (*Python*). Promover a análise de diferentes tabelas ou representações gráficas que se podem encontrar em jornais, revistas ou na internet (retomar exemplos do 3.º ciclo do EB).	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)
Funções polinomiais de grau não superior a 2 Função afim Função quadrática	Estudar gráfica e analiticamente a função afim em termos de zeros, sinal e monotonia. Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente.	Relembrar as relações entre a representação algébrica e geométrica de uma função afim, estudadas no 3.º ciclo do EB, nomeadamente a identificação do declive da reta e da ordenada na origem nas duas representações. Promover o estudo de funções definidas analiticamente com recurso à tecnologia gráfica, nomeadamente através da resolução de problemas em contexto de modelação de funções afins e quadráticas. No caso da função quadrática, efetuar uma referência histórica à parábola.	

	Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $f(x-a)$, $f(x)+b$, $c\,.\,f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, a partir do gráfico da função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas. Resolver equações e inequações do 2.º grau, em contextos de resolução de problemas. Determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.	Propor a representação de famílias de funções afins e quadráticas, com recurso à tecnologia gráfica, determinando zeros, sinal e vértice das parábolas. Conduzir os alunos à dedução da fórmula resolvente para o cálculo dos zeros da função quadrática. Propor a elaboração de um programa em *Python* para determinação dos zeros de uma função quadrática. Promover o estudo da relação entre gráfico da função definida por $f(x)=x^2$ e os gráficos das funções $f(x-a)$, $f(x)+b$, $c\,.\,f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, e usá-las na resolução de problemas em contextos de modelação. Promover a recolha de dados para modelação com funções, utilizando instrumentos de medição ou sensores, como por exemplo a experiência da deslocação de uma bola num plano inclinado.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Funções definidas por ramos	Estudar gráfica e analiticamente funções definidas por ramos e utilizá-las em contextos de modelação. Estudar funções definidas por ramos relativamente ao domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e sinal, em casos simples. Reconhecer a função módulo como um caso particular de uma função definida por ramos.	Fomentar a resolução de problemas, em contexto real, que possam ser modeladas por funções definidas por ramos (por exemplo, escalões do IRS, faturas de água ou eletricidade, as sucessivas acelerações e desacelerações provocadas no movimento de um automóvel). Propor a elaboração de tabelas de variação de sinal. Propor o estudo da função módulo como uma função definida por ramos. Propor a elaboração de um programa em *Python* para definir a função módulo.	

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para determinar as soluções de uma equação do 2.º grau:

```
import math
a=2
b=1
c=-3
delta=b**2-4*a*c
if delta<0:
    print("Não tem soluções")
elif delta==0:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem só uma solução: ',x1)
else:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Exemplo de programa em *Python* para definir a função módulo calculando a imagem para um determinado objeto:

```
def modulo(x):
    if x<0:
        return -x
    else:
        return x

x=float(input('x = '))
print('A imagem de ',x,' é: ',modulo(x))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Possíveis aprofundamentos:

Caraterizar o gráfico de uma função quadrática como sendo o conjunto de pontos a igual distância de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz).
Definir regiões do plano delimitadas por parábolas e retas e obter aproximações da área respetiva por enquadramentos com recurso a polígonos.
Estudar a parte inteira de um número, as funções "chão" e "teto", as funções "sinal" sgn(x) e de *Heaviside* H(x), como funções definidas por ramos.

Bibliografia de referência

Copérnico, Nicolau (2014). *A revolução das orbes celestes*, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.
Guichard, Jean Paul (1986). *História da Matemática no ensino da Matemática*. in Bouvier, A. (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedic/Nathan,1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html
Icart, J (2021). "Fonctions: Une Perspective Historique". *Revue MathémaTICE*, nº 75. Obtido de http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
GEOMETRIA Geometria analítica no plano Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano Coordenadas de pontos num referencial cartesiano Conjuntos de pontos e condições Mediatriz, circunferência e círculo	Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano, ortogonal e monométrico. Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - transformados de pontos, por uma reflexão de eixo vertical ou horizontal, ou por uma meia-volta de centro na origem; - coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; - fórmula da distância entre dois pontos; - condições que definem conjuntos de pontos: - equações de retas verticais e não verticais; - semiplanos; - mediatriz de um segmento de reta; - circunferência e círculo; - outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções, em casos simples.	Promover o uso do Geogebra em explorações, por exemplo: - procurar coordenadas do transformado de um ponto, por uma reflexão de eixo vertical ou horizontal, ou por uma meia-volta de centro na origem; - analisar condições que possam definir conjuntos de pontos e perceber como diferentes condições geram conjuntos de pontos diferentes (incluindo o conjunto vazio). Propor a determinação das coordenadas do baricentro e do circuncentro de um triângulo, dadas as coordenadas dos seus vértices. Propor problemas de modelação matemática como por exemplo encontrar a melhor localização, em termos de coordenadas no plano, para uma torre de transmissão de sinal que sirva três localidades. Nestas Aprendizagens Essenciais, no estudo que envolve circunferências, só se consideram equações reduzidas.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C)
Geometria analítica no espaço Referenciais cartesianos	Identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial cartesiano ortogonal e monométrico.	Propor aos alunos a construção de modelos tridimensionais de referenciais, usando materiais simples (cartão, palhinhas ou outros).	

ortogonais e monométricos no espaço Coordenadas de pontos Conjuntos de pontos e condições Superfície esférica e esfera.	Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; - fórmula da distância entre dois pontos; - condições que definem conjuntos de pontos: - planos paralelos aos planos coordenados; - retas paralelas a um dos eixos; - planos mediadores; - superfície esférica e esfera.	Estimular os alunos a utilizar o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo geometria no espaço, por exemplo, problemas envolvendo interseções de planos paralelos aos planos coordenados com esferas. Propor problemas de modelação matemática, como por exemplo a determinação da distância entre a Terra, o Sol e outros corpos celestes, a partir das suas coordenadas. Nestas Aprendizagens Essenciais, no estudo que envolve superfícies esféricas só se consideram equações reduzidas.	Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)
Vetores no plano e no espaço Vetores livres no plano e no espaço: - coordenadas de um vetor num referencial ortonormado - vetor como diferença de dois pontos - colinearidade de dois vetores	Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - norma de um vetor; - propriedades algébricas das operações com vetores; - coordenadas de um vetor; - coordenadas da soma e da diferença de vetores; - coordenadas do produto de um escalar por um vetor e do simétrico de um vetor; - relação entre as coordenadas de vetores colineares; - vetor definido por dois pontos e cálculo das respetivas coordenadas; - coordenadas do ponto resultante da soma de um ponto com um vetor; - cálculo da norma de um vetor por meio das suas coordenadas.	Abordar a soma de vetores, a soma de um ponto com um vetor e o produto de um escalar por um vetor em contexto de resolução de problemas. Referir a ligação do cálculo vetorial com outras áreas, como por exemplo as grandezas vetoriais da Física (forças, deslocamentos, velocidades), a meteorologia, a computação gráfica, o jogo do bilhar.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Equação vetorial da reta no plano e no espaço Equação reduzida da reta no plano	Reconhecer que uma reta fica definida se for conhecido um ponto da reta e um vetor diretor. Escrever uma equação vetorial de uma reta. Estabelecer a relação entre: - as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta. - paralelismo de retas, igualdade do declive e colinearidade de vetores diretores das retas; - equação reduzida e equação vetorial de uma reta.	Conduzir os alunos a escrever a equação vetorial de uma reta, associada ao produto de um escalar por um vetor e à colinearidade de dois vetores. Promover a determinação da equação reduzida de uma reta tendo por base uma equação vetorial dessa reta e vice-versa. Propor aos alunos a utilização do Geogebra para explorar: - a relação entre vetor diretor de uma reta e paralelismo de retas; - o efeito dos parâmetros, da equação reduzida de uma reta, na sua representação gráfica. Propor a construção de um programa simples em *Python* que permita determinar a equação reduzida de uma reta e uma equação vetorial dessa reta, dadas as coordenadas de dois pontos. Salientar o papel central da equação reduzida da reta, permitindo escrever a equação de qualquer reta não vertical, cujo gráfico lhe seja apresentado, sem que para isso seja necessário fazer exercícios repetitivos.	

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para determinar o declive, a ordenada na origem, a equação reduzida e uma equação vetorial da reta que passa por 2 pontos, a partir das suas coordenadas.

```
xA=3
yA=-1
xB=-4
yB=-2
if xA==xB:
    print('A reta que une os dois pontos é vertical: x=',xA)
else:
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    b= yA-m*xA
    print('Declive da reta: ',m)
    print('Ordenada na origem: ',b)
    print('y=',m,'x+',b)
print('Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=(',xA,',',xB,')+k(',xB-xA,',',yB-yA,'),kER')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Exemplo de programa em *Python* para colocar pontos igualmente espaçados num segmento dado pelas suas coordenadas.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
xA=3
yA=7
xB=1
yB=-8
n=4
xv=xB-xA
yv=yB-yA
xx=[]
yy=[]
for i in range(n+1):
    di=i/n
    xx=xx+[xA+di*xv]
    yy=yy+[yA+di*yv]
plt.plot(xx,yy,'o-')
```

Nota: O programa foi criado em Spyder IDE 5.1.5

<u>Possíveis aprofundamentos</u>

Poderão ser abordados outros temas como aprofundamento:
Explorar os primórdios da Geometria Analítica com Descartes e Fermat;
Explorar a geometria numa esfera e como influencia as viagens espaciais.
Explorar uma das aplicações modernas da geometria analítica no espaço, o GPS-Sistema de Posicionamento Global. Na sua versão mais simples envolve a interseção de esferas a partir das suas equações.
Algumas das referências e vídeos:

Alves, S. (2006). A matemática do GPS. *Revista do Professor de Matemática*, nº 59. Obtido de https://www.rpm.org.br/cdrpm/59/5.htm
Como funciona o GPS. Obtido de http://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/
A matemática está por trás do GPS e da navegação moderna. Obtido de https://impa.br/noticias/a-matematica-esta-por-tras-do-gps-e-da-navegacao-moderna/
A matemática do GPS. Obtido de
https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=96932821320&d=20191117203922&h=0818e4e2bf4b85e9e5e4f1320b439a6e3009ea91
O uso do GPS como recurso pedagógico para o estudo de elementos da Geometria Analítica. Obtido de http://hdl.handle.net/1843/BUBD-ANHM7M
Atractor, Núcleo do Porto da APM (2013). A Geometria do Planeta Terra, *Educação & Matemática*, nº 121, p. 22-26

Bibliografia de referência

Carreira, S. e Amado, N. (2018). A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a Vesica Piscis. *Educação & Matemática*, nº 148, p. 39-43.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*, Universidade Aberta
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Applications and Interpretation HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Khan Academy. *Geometria Analítica*. Obtido de https://pt-pt.khanacademy.org/math/10ano/xe7bf8a38a4e84c6a:geometria-analitica-no-plano
Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Odenwald, S. (s/d) *Astronomy and Space Science Applications Featuring Geometry*. SPACEMATH@NASA. Obtido de https://spacemath.gsfc.nasa.gov/geometry.html
Precatado, A. e Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978) *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
Veloso, E. (1998) *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Cofinanciado por:

PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu