



10.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

# Matemática B

(Matemática Aplicada às Artes Visuais)

## INTRODUÇÃO

---

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática B, devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

## 1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de Matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, pela crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades necessários para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática, abrangente, relevante e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados, e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjecturas, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens apreciem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática B orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

## 2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas matemáticas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, estas Aprendizagens Essenciais exploram modelos matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática B promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos e nas abordagens de cada tema, valorizando o recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no ensino secundário em Portugal, com diferentes graus de aprofundamento. Desta forma, pretende-se dotar os alunos de competências de índole científica que permitam sustentar diferentes percursos académicos e profissionais.

- Papel central da Geometria

O Curso de Artes Visuais dos cursos científico-humanísticos do ensino secundário necessita de uma disciplina de Matemática especialmente desenhada tendo em vista esse curso. Neste contexto, a área da Geometria deve desempenhar um papel muito

importante. Com efeito, a Geometria está de tal modo presente na natureza, que a Arte frequentemente se sustenta na Geometria para a descrever. Pareceria assim estranho que um artista não tivesse uma forte formação em Geometria, para além do que é estudado no ensino básico. A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria analítica e sintética, padrões geométricos e trigonometria, com as competências de resolução de problemas métricos, com permanentes preocupações de contextualização, indo assim ao encontro das motivações e interesses dos alunos e também do perfil dos alunos dos Cursos de Artes Visuais.

- Aproximação aos Cursos Artísticos Especializados

Desde 2007 que os Cursos Artísticos Especializados possuem a sua própria disciplina de Matemática que, embora com menor carga horária, tem vindo a proporcionar uma formação matemática adequada aos alunos das Escolas Artísticas Soares dos Reis e António Arroio. Assim, as Aprendizagens Essenciais de Matemática B aproximam-se do programa dessa disciplina e acrescentam alguns temas também relevantes para a formação dos alunos desta área.

- Aproximação aos Cursos Profissionais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática B integram os seis módulos obrigatórios da disciplina de Matemática dos Cursos Profissionais de 300 horas, possibilitando que, para efeitos de prosseguimento de estudos de nível superior, a prova de exame para a Matemática B e da Matemática dos Cursos Profissionais, seja centrada nesses seis módulos obrigatórios e igual nas duas disciplinas.

### 3. Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no ensino secundário dão continuidade às aprendizagens do ensino básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

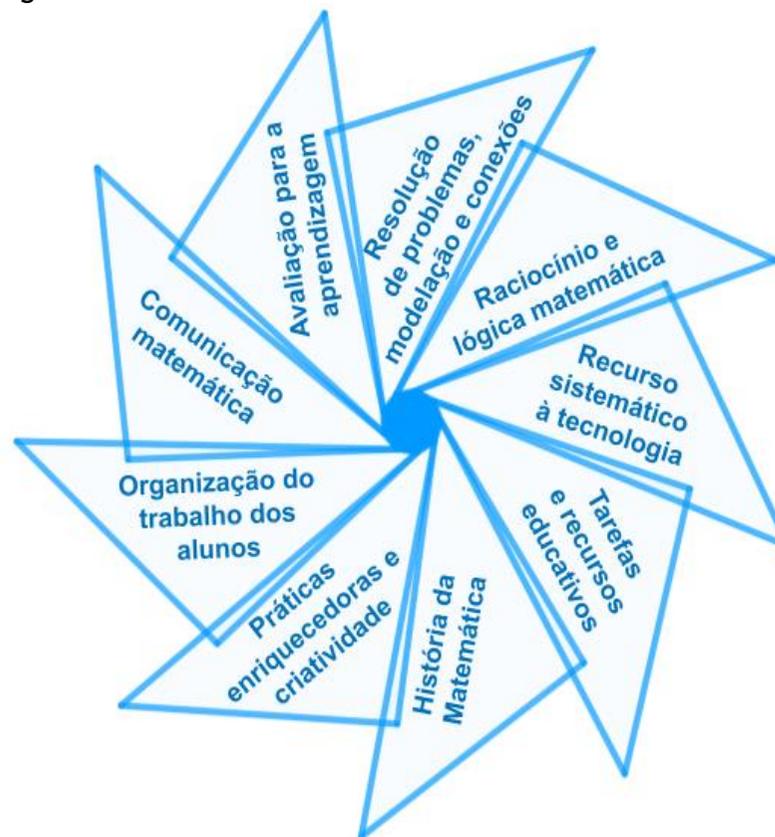


Figura 1. Ideias chave das aprendizagens essenciais

## 1) Resolução de problemas, modelação e conexões

### *Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações*

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da matemática, assim como entre esta e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, treino de procedimentos ou conhecimento de resultados ou à execução de procedimentos sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia a dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

## 2) Raciocínio matemático

### *Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas*

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a testar conjecturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo.

### 3) Recurso sistemático à tecnologia

***Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.***

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), a folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

### 4) Tarefas e recursos educativos

***Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados***

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

## 5) História da Matemática

### *Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade*

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, a evolução das epidemias ou a exploração espacial.

## 6) Práticas enriquecedoras e criatividade

### *Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática*

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade. A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que envolve a matemática são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

## 7) Organização do trabalho dos alunos

### ***Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreaajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem***

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

## 8) Comunicação matemática

### ***Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado***

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

## 9) Avaliação para a aprendizagem

### ***Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem***

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas

de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

#### 4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática B destina-se aos alunos do Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, como disciplina bial de opção, ou a alunos de outros cursos que, nos termos da legislação aplicável, optem por um percurso formativo próprio. Pretende-se que os alunos desenvolvam conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitam adquirir um conjunto de competências, tendo em vista a construção do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Os temas a abordar são Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria, Trigonometria, Estatística, Probabilidade e Funções.

As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas *Modelos Matemáticos para a Cidadania e Estatística*. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam *Geometria Analítica* (no plano e no espaço), *Padrões Geométricos* e *Funções* numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram os temas *Taxa de Variação e Otimização*, *Geometria Sintética*, *Probabilidade*, *Distâncias Inacessíveis* e o tema *Matemática e a Arte*. A abordagem das funções considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico, valorizando o recurso à tecnologia.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. No 10.º ano são apresentadas propostas de projetos nos temas *Modelos Matemáticos para a Cidadania*, *Estatística* e *Geometria Analítica* no plano e no espaço, *Funções* e *Padrões Geométricos*. No 11.º ano são apresentadas propostas de projetos nos temas *Distâncias Inacessíveis* e *Geometria Sintética*, podendo ser recuperado um trabalho de projeto do 10.º ano ou dada continuidade ao mesmo. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um projeto em cada tema indicado, podendo em alternativa ser desenvolvida outra proposta de trabalho de projeto em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) dos Cursos Científico-Humanísticos de Artes Visuais concretizam-se em dois documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem, conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.
- *Áreas de competência do perfil do aluno*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

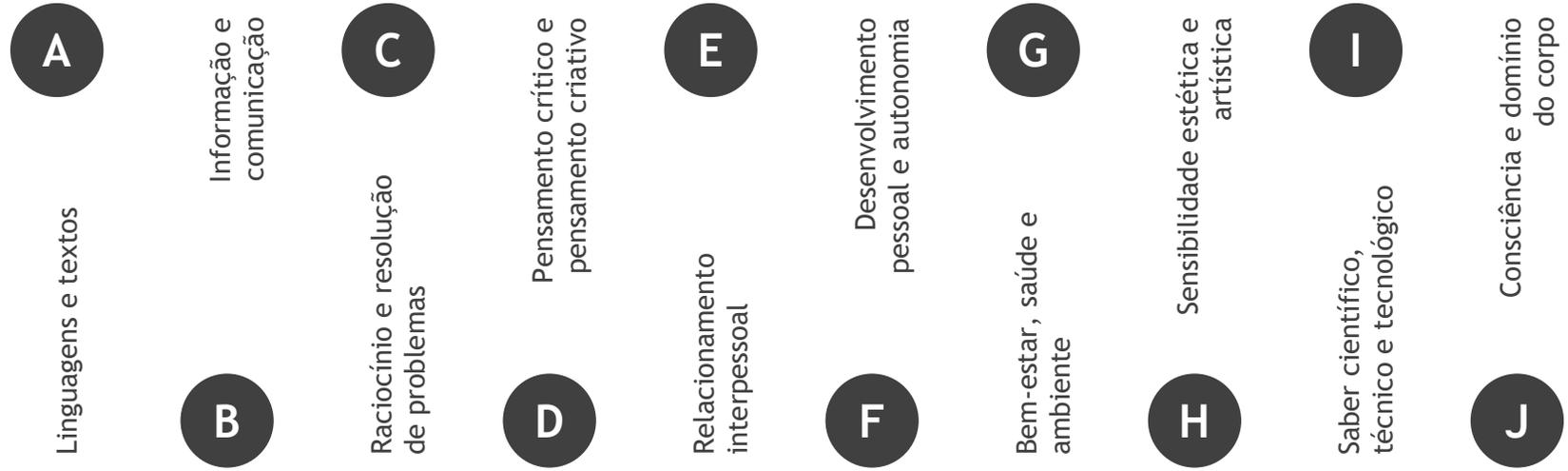
Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados nestas Aprendizagens Essenciais constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com cinco tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
<b>Modelos matemáticos para a cidadania</b>	Modelos matemáticos nas eleições	5	4
	Modelos matemáticos na partilha	5	
	Modelos financeiros	10	
<b>Estatística</b>	Problema estatístico. População, amostra e variável	4	8
	Dados univariados	15	
	Dados bivariados	10	
	[Trabalho de projeto]	11	
<b>Geometria Analítica no plano e no espaço</b>	Geometria analítica no plano	15	5
	Geometria analítica no espaço	10	
<b>Funções</b>	Generalidades acerca de funções	9	6
	Funções polinomiais de grau não superior a 3	8	
	Funções inversas	8	
	Modelação com funções	5	
<b>Padrões Geométricos</b>	A matemática no património	5	5
	Pavimentações e padrões	10	
	Isometrias, frisos e rosáceas	10	
		<b>Total</b>	<b>28</b>

ÁREAS DE  
COMPETÊNCIAS  
DO PERFIL DOS  
ALUNOS (ACPA)



## OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA</b></p> <p>Modelos matemáticos nas eleições</p> <p>Maioria simples</p> <p>Maioria absoluta</p> <p>Método de Borda</p>	<p>Reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais.</p> <p>Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva.</p> <p>Identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta.</p> <p>Identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).</p>	<p>Contribuir para o reconhecimento da necessidade da matemática para definir métodos eleitorais.</p> <p>Contribuir para a clarificação da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, estruturas sindicais e poderes políticos).</p> <p>Promover a análise, a interpretação e a discussão de sistemas eleitorais que valorizem a existência de uma segunda volta, como é o caso da eleição do Presidente da República de Portugal, nomeadamente a referência à eleição presidencial de 1986.</p> <p>Sugerir a construção de um programa simples em <i>Python</i>, de iniciação à linguagem, que permita determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações em 3 candidatos.</p> <p>Propor a análise de situações que evidenciem claramente o facto de métodos eleitorais diferentes gerarem escolhas diferentes para a mesma votação, recorrendo a contextos eleitorais concretos, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- eleição do delegado de turma;</li> <li>- eleição para a Associação de Estudantes;</li> <li>- eleições para os órgãos sociais de clubes desportivos.</li> </ul> <p>Referir que todos os métodos eleitorais têm limitações, nomeadamente, encorajar o debate de situações em que existe e em que não existe transitividade das escolhas.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B)</p>

<p>Modelos matemáticos na partilha</p>	<p>Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para fazer distribuições proporcionais.</p>	<p>Analisar com os alunos os contextos eleitorais das eleições autárquicas e das eleições para a Assembleia da República, suscitando a compreensão da necessidade de um método de partilha proporcional.</p>	<p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</p>
<p>Método de Hondt Método de St. Laguë</p>	<p>Conhecer e aplicar o método de Hondt e o método de St. Laguë. Identificar vantagens e limitações dos métodos de Hondt e St. Laguë.</p>	<p>Incentivar os alunos a confirmar o processo da distribuição de mandatos num organismo local (eleições com um número reduzido de mandatos - até 6 mandatos).</p> <p>Promover a exploração, com recurso à tecnologia gráfica (folha de cálculo), de distribuições de mandatos em cenários nacionais (eleições com um número elevado de mandatos, por exemplo, a distribuição de mandatos por círculo eleitoral).</p> <p>Propor a análise de situações concretas que evidenciem claramente que métodos de partilha diferentes geram distribuições diferentes para a mesma eleição, por exemplo, as eleições europeias de 1987. Promover a análise de casos em outras situações, como por exemplo, a distribuição de um número de computadores por departamentos com diferentes dimensões.</p> <p>Promover discussões sobre problemas de partilha, identificando os modelos matemáticos que contribuem para as diversas soluções e limitações na sua aplicação.</p>	<p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</p>
<p>Modelos matemáticos em finanças Matemática nos salários</p>	<p>Calcular o valor dos salários mensal, anual e por hora, dadas as condições de um contrato. Reconhecer a diferença entre salário bruto e salário líquido. Calcular contribuições obrigatórias para sistemas de segurança social. Calcular retenção na fonte para IRS.</p>	<p>Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos), promovendo a construção de uma folha de cálculo.</p> <p>Sugerir em grande grupo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- uma discussão que inclua a identificação de diferentes formas de referência aos rendimentos e dificuldades de comparação (ex: rendimento anual, salário mensal, rendimento por hora);</li> <li>- a análise de exemplos relacionados com o processamento dos vencimentos (ex: recibos);</li> </ul>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>

<p>Matemática na poupança e no crédito</p>	<p>Calcular o IRS anual em casos simples em função do rendimento coletável.</p> <p>Compreender o caráter provisório da taxa mensal de retenção na fonte (IRS).</p> <p>Identificar a progressividade do IRS e a relevância dos escalões.</p> <p>Calcular juro simples e juro composto (com diferentes períodos de capitalização dos juros).</p>	<p>- a pesquisa e análise de tabelas de IRS, identificação dos escalões aplicáveis e discussão sobre a progressividade deste imposto.</p> <p>Promover, com recurso à tecnologia, o cálculo de juros simples e compostos em diferentes situações.</p> <p>Promover, em casos simples, usando a folha de cálculo, o cálculo do:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-capital obtido, através de uma capitalização de juro simples, num dado tempo, o capital final;</li> <li>-capital obtido, com diferentes capitalizações (mensal, anual, semestral) usando juro composto, num dado tempo, o capital final.</li> </ul> <p>Sugerir a construção de um programa simples em <i>Python</i> que permita determinar o cálculo de juros simples e o cálculo de juros compostos.</p> <p>Analisar a rentabilidade de diferentes depósitos a prazo, durante um prazo predefinido, recorrendo à folha de cálculo e ao uso de simuladores disponíveis na Internet.</p> <p>Promover, em casos simples, o cálculo de:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- capital inicial a depositar para, ao fim de um dado tempo, ter um certo capital final com uma taxa de juro fixa;</li> <li>- tempo mínimo de capitalização, dados os capitais inicial e final e a taxa de juro.</li> </ul>	<p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>
--	--	--	--

## Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor nos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser encorajados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos (270 para o candidato A, 153 votos para o candidato B e 201 para o candidato C) .

```
cA=270
cB=153
cC=201
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print(ma)
```

A conclusão é que para obter maioria absoluta são precisos *ma* votos. Algum dos candidatos ultrapassou esse valor?

Numa possível extensão a este programa poderá ser verificado se algum dos candidatos obteve maioria absoluta.

Exemplo de programa em *Python* que permite, sendo inseridas as votações de 3 candidatos, determinar o número de votos que garante a maioria absoluta e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
    print("O candidato A obteve maioria absoluta com",cA,"votos.")
elif cB>=ma:
    print("O candidato B obteve maioria absoluta com",cB,"votos.")
elif cC>=ma:
    print("O candidato C obteve maioria absoluta com",cC,"votos.")
else:
    print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Em alternativa à folha de cálculo, as simulações referentes à distribuição de mandatos pelo método de Hondt poderão ser realizadas através de pequenos programas em *Python*, procurando por exemplo o número mínimo e máximo de votos para um partido obter um número predeterminado de lugares (por exemplo, todos os mandatos serem atribuídos ao mesmo partido). Uma simulação do método de Hondt pode ser encontrada em:

<https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx>

Podem propor-se vários tipos de programas em *Python* para concretizar os Modelos Financeiros; por exemplo o cálculo de uma capitalização anual ou uma capitalização mensal, dado um capital inicial.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização anual, dado um capital inicial:

```
ci=1000    #valor inicial
r=0.03     #taxa de juro anual
cf=ci+ci*r
print('O capital final é ',cf,'€')
```

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização mensal passados n meses, dado um capital inicial:

```
ci=300     #valor inicial
r=0.03     #taxa de juro anual
n=10       #número de períodos de capitalização
cf=ci*(1+r/12)**n
print('O valor final ao fim de ',n,' meses é', cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação da periodicidade e do número de períodos de capitalização.

### Possíveis aprofundamentos

Se for possível e oportuno, poderão ser abordados outros métodos eleitorais como, por exemplo, o método de Condorcet e a sua alegada proposta (em 1888) de um método eleitoral superior a todos os outros.

Exemplo de um caso interessante a estudar: a mudança do uso de maioria simples para a maioria absoluta ao longo dos anos na Ordem dos Médicos e na Ordem dos Advogados.

Também pode ser feita a comparação com o método usado nas eleições para a Ordem dos Enfermeiros em que a lista vencedora é a que obtiver mais votos, sem exigência de maioria absoluta (e só com uma volta). Neste último caso pode ser consultada a página

<https://www.ordemenfermeiros.pt/arquivo/comunicacao/Paginas/ProclamacaoEleicoes> onde se encontra a proclamação dos resultados definitivos das Eleições de 12 de dezembro de 2011.

Avaliação financeira de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos.

Cálculo das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras.

### Bibliografia de referência

- Aspas, R. (2020). *Tipos de impostos: diretos e indiretos*. Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/financas-pessoais/impostos-em-portugal-diretos-e-indiretos/>
- Batista, A. S. (2014). *Matemática financeira. O valor do dinheiro ao longo do tempo*. Porto: Vida económica.
- Chalub, F. (2019). O ano de todas as eleições. *Gazeta de Matemática*, nº 188, p. 9-11.
- CNE, *Eleições / Referendos*. Obtido de: <https://www.cne.pt/content/eleicoes-referendos>
- CNE, *Método de Hondt*. Obtido de <https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt>
- COMAP (2016). *For all Practical Purposes - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Lisboa: Banco de Portugal.
- Domingos, A., Santiago, A, e Teixeira, P. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Perfis financeiros, *Educação & Matemática*, nº 142, p. 13-14.
- Feiteira, R. (2007). O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas? *Gazeta de Matemática*, nº 152, p. 32-37.
- Feiteira, R. (2008). Alguns métodos eleitorais através do Excel, *Educação & Matemática*, nº 96, p. 29-33.
- Gonçalves, D. (2019). *Quais os Impostos cobrados na compra de uma casa?* Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/creditos/credito-habitacao/quais-os-impostos-cobrados-na-compra-de-uma-casa/>
- Junior, I. M. (2021). *Educação Financeira*. IMPA. Obtido de <https://umlivroaberto.org/producao/educacao-financeira/>
- Lopes, A. V., e Moreirinha, O. (2004). Materiais para a Aula de Matemática - Métodos de apoio à decisão: Plínio, o jovem. *Educação & Matemática*, nº 79, p. 25.
- Lopes, A. V. et al. (2002). Materiais para a aula de Matemática - Eleições para a Presidência da República -1986. *Educação & Matemática*, nº 67, p. 34-35.
- Machado, H. A. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal. Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Técnica de Lisboa.
- Malkevitch, J. (1999). *Teoria Matemática das Eleições*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*. Obtido de: [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial\\_de\\_educacao\\_financeira\\_final\\_versao\\_port.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf)
- Nascimento, N. H. A. (2015). *Matemática e educação financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa. Obtido de <http://hdl.handle.net/10362/16356>
- Pinto, D. V., e Domingos, A. (2015). A Educação Financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática*, (pp. 121). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.
- Pordata / RTP (2015). *O que é a dívida pública?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-e-a-divida-publica/>
- Pordata / RTP (2015). *O que são impostos diretos e indiretos?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-sao-impostos-diretos-e-indiretos/>
- Ribeiro, E. M. C. (2013). *Literacia Financeira. Estudo aplicado aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Portucalense Infante D. Henrique.
- Rodrigues, A., e Pimenta, C. (2017). *Literacia financeira - construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12º ano de escolaridade)*. CIBEM 2017 (Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática) CB-219, p. 74-84. Madrid: Universidade Complutense.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>ESTATÍSTICA</b></p> <p><b>Problema estatístico</b></p> <p><b>Variabilidade</b></p>	<p>Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.</p> <p>Reconhecer a variabilidade como um conceito chave de um problema estatístico.</p> <p>Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente.</p>	<p>Promover a discussão na turma para identificar e formular questões estatísticas, cujas respostas dependam da recolha de dados.</p> <p>Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, o político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam diariamente na escola; o padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir.</p>	<p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)</p>
<p><b>População, amostra e variável</b></p> <p><b>Fases de um procedimento estatístico</b></p>	<p>Identificar num estudo estatístico, população, amostra e a(s) característica(s) a estudar, que se designa(m) por variável(variáveis).</p> <p>Reconhecer as fases de um procedimento estatístico:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Produção ou aquisição de dados;</li> <li>- Organização e representação de dados;</li> <li>- Interpretação tendo por base as representações obtidas.</li> </ul> <p>Reconhecer os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras</p>	<p>Alertar que os termos população e amostra se referem a conjuntos de unidades estatísticas, mas que estes termos também são usados para identificar os conjuntos de valores assumidos pela variável em estudo.</p> <p>Propor a recolha de informação nos jornais ou na internet sobre notícias que permitam:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- diferenciar os processos de recenseamento e sondagem (recolher dados sobre toda a população ou sobre uma amostra);</li> <li>- identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária.</li> </ul> <p>Alertar para a necessidade de recolha de dados reais,</p>	<p>Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C)</p>

	<p>enviesadas cujo estudo levaria a inferir conclusões erradas para as populações.</p> <p>Intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras para inferir para a população subjacente, não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como verdadeiro ou falso.</p>	<p>como forma de responder a questões concretas.</p> <p>Promover a discussão sobre a dimensão da amostra a recolher, informando que esta dimensão depende muito da variabilidade presente na população subjacente e deverá ser tanto maior quanto maior for a dimensão da população. Informar que existem técnicas para definir quais as dimensões mínimas para garantir a precisão dos processos em que se pretende inferir para a população as propriedades verificadas na amostra. Chamar a atenção para que existem processos apropriados para a seleção das amostras de forma a garantir a aleatoriedade e a representatividade da população subjacente.</p> <p>Informar que a utilização da probabilidade vai permitir tomar uma decisão para a população, a partir do estudo da amostra, quantificando o erro cometido ou o grau de confiança nessa decisão, exemplificando com a forma como se transmite o resultado de uma sondagem eleitoral.</p>	<p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p> <p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p>
<p>Dados univariados</p> <p>Dados quantitativos discretos ou contínuos</p>	<p>Identificar dados quantitativos discretos ou contínuos.</p>	<p>Informar que quando se está a recolher dados quantitativos, isto é, a “medir” a variável em estudo sobre as unidades estatísticas selecionadas para a amostra, confrontamo-nos com duas situações: ou a variável assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos, caso em que se diz <i>discreta</i>, e a observação assume a forma de uma <i>contagem</i>; ou a variável pode assumir qualquer valor num intervalo em <math>\mathbb{R}</math>, caso em que se diz <i>contínua</i>, e a observação assume a forma de uma <i>medição</i>.</p> <p>Salientar que a natureza dos dados não é uma característica necessariamente inerente à variável em estudo, porque pode depender da forma como é medida. Exemplificar com a variável Idade que é de tipo contínuo e que pode ser utilizada de forma discreta (10, 15, 23,...), uma peça</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>

<p>Organização de dados</p>	<p>Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las.</p> <p>Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, lembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis.</p>	<p>de roupa, cujo “tamanho” é uma variável contínua, mas é frequentemente classificada em categorias (XS, S, M, L, XL, ...), isto é, dados de tipo qualitativo.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para construir tabelas e gráficos.</p> <p>Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados e salientar a importância do diagrama de extremos-e-quartis para comparar várias distribuições de dados.</p>	<p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G)</p>
<p>Histograma</p>	<p>Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos.</p> <p>Construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.</p>	<p>Salientar que o aspeto do histograma depende do número de classes considerado, da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para que uma representação com muitas classes apresentará muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto que um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão).</p> <p>Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra, respetivamente discreto ou contínuo.</p>	<p>Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>
<p>Medidas de localização</p>	<p>Interpretar as medidas de localização: média (<math>\bar{x}</math>), mediana (<math>M_e</math>), moda(s) (<math>M_o</math>) e percentis (quartis como caso especial) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p>	<p>Incentivar a utilização da tecnologia para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.</p>	

<p>Medidas de dispersão</p>	<p>Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, <math>s</math>, (variância amostral, <math>s^2</math>) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p>	<p>Sugerir a elaboração de um programa simples em <i>Python</i> que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “<math>a</math>” e pela adição de uma constante “<math>b</math>”. Realçar a utilização enganadora da média, em casos em que existem <i>outliers</i> (dados muito diferentes do padrão dos restantes), devido à grande influência desses dados.</p>	
<p>Propriedades das medidas</p>	<p>Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Pouca resistência da média e do desvio padrão;</li> <li>- Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero;</li> <li>- Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais;</li> <li>- Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade;</li> </ul> <p>Conhecer que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão.</p> <p>Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar, como medida de localização do centro da distribuição dos dados, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples.</p>	<p>Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados dessas medidas.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da Direção Geral de Saúde. (<a href="https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf">https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf</a>), relacionando o “peso” e a “estatura” com a “idade”.</p> <p>Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados.</p>	

	<p>Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc.</p>	<p>Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema, que levou à recolha dos dados.</p>	
<p>Dados bivariados</p> <p>Dados quantitativos</p> <p>Diagrama de dispersão</p> <p>Coefficiente de correlação linear</p>	<p>Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis quantitativas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se uma amostra de pares de dados.</p> <p>Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, direção e força da associação (linear) entre as duas variáveis.</p> <p>Identificar o coeficiente de correlação linear <math>r</math>, como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores pertencentes a <math>[-1, 1]</math>, dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula. Recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear.</p>	<p>Conduzir os alunos a explorar situações em que tenha interesse estudar a associação entre duas variáveis sobre as mesmas unidades estatísticas.</p> <p>Envolver os alunos na discussão sobre a construção do diagrama de dispersão, em especial na identificação da variável independente ou explanatória. Por exemplo, pretendendo-se estudar a associação entre as variáveis “idade” e “altura”, a variável independente ou explanatória deverá ser a “idade” e a variável “altura” a variável dependente ou resposta.</p> <p>Apresentar a expressão do coeficiente de correlação e utilizá-la para interpretar a associação linear entre as variáveis como positiva, negativa ou nula.</p> <p>Realçar que o coeficiente de correlação só assume os valores <math>-1</math> ou <math>1</math>, quando os pontos no diagrama de dispersão estão alinhados numa reta.</p> <p>Realçar e exemplificar que a correlação linear só mede a associação linear entre as variáveis, já que o coeficiente de correlação pode ser próximo de zero e as variáveis estarem fortemente correlacionadas, não linearmente.</p>	

<p>Reta de regressão - variável independente ou explanatória - variável dependente ou resposta.</p>	<p>Compreender que no caso do diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados. Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão.</p> <p>Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou <i>explanatória</i>. Compreender que a existência de <i>outliers</i> influencia estes procedimentos.</p> <p>Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados.</p> <p>Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo.</p>	<p>Realçar que só no caso de se visualizar uma associação aproximadamente linear entre os pontos do diagrama de dispersão é que tem sentido utilizar a tecnologia para calcular o coeficiente de correlação, bem como construir a reta de regressão.</p> <p>Comentar com os alunos a razão de se chamar à reta de regressão, reta dos mínimos quadrados.</p> <p>Propor a construção da reta de regressão, recorrendo à tecnologia e explorar a forma como é afetada por <i>outliers</i>. Exemplificar com os chamados “conjuntos de dados de Anscombe”, que embora apresentem as mesmas características amostrais, têm representações gráficas muito diferentes, realçando a importância de uma visualização prévia dos dados antes de proceder ao cálculo do coeficiente de correlação ou à construção da reta de regressão.</p> <p>Explorar o modelo da reta de regressão no contexto do estudo, nomeadamente inferindo valores da variável resposta para determinados valores para a variável explanatória.</p> <p>Propor a pesquisa na internet de situações em que existem variáveis “perturbadoras”.</p>	
<p>Gráfico de linhas</p>	<p>Entender que um gráfico de linhas é um caso particular de um diagrama de dispersão, em que se pretende estudar a evolução de uma das variáveis relativamente a outra variável, de um modo geral o tempo, e em que se unem, por linhas, os pontos representados.</p>	<p>Promover a exploração de alguns exemplos concretos de gráficos de linhas, como a evolução da temperatura medida numa determinada hora, ao longo de um mês, em determinado local.</p>	

<p><b>Aprofundamento do estudo de Estatística com trabalho de projeto (*)</b></p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Estatística num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos.</p> <p>Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Estatística, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- A minha região em números! O que diz o Censos 2021...;</li> <li>- A nossa Cantina Escolar em números!;</li> <li>- O Papel da Mulher na Sociedade;</li> <li>- Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não?;</li> <li>- Como estão os nossos oceanos? (Plasticus maritimus, Planeta tangerina,...);</li> <li>- Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos?</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	
---	---	--	--

(\*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 10.º ano tal como é exemplificado nas propostas apresentadas abaixo.

## Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* que permite calcular a média, a mediana, o máximo e o mínimo das idades de 5 alunos de uma turma:

```
idades=[14,16,14,15,17]
idades.sort()
soma=0
for i in range(5):
    soma=soma+idades[i]
print('Idades:',idades)
print('Media:',soma/5)
print('Mediana:',idades[2])
print('Máximo:',idades[4])
print('Mínimo:',idades[0])
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possível extensão poderá propor-se aos alunos uma generalização do programa de modo que a dimensão da lista possa ser variável. Sugere-se a utilização da função *len()* que permitirá determinar o número de elementos da lista.

Exemplo de programa em *Python* que permita determinar o desvio-padrão e a amplitude de uma lista de idades com um n.º de elementos variável:

```
import math
idades=[14,16,14,15,17,23]
idades.sort()
n=len(idades)
soma=0
for i in range(n):
    soma=soma+idades[i]
media=soma/n
desvios=0
for i in range(n):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=math.sqrt(desvios/n)
amplitude=idades[n-1]-idades[0]
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Amplitude:', amplitude)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

### Possíveis aprofundamentos

Explorar a utilização de tabelas de contingência (tabelas de dupla entrada) para representar amostras de dados bivariados qualitativos. Ter em consideração que embora se fale de dados qualitativos, eles podem ser resultado da observação de variáveis quantitativas (Exemplo a variável Idade, que é quantitativa contínua, mas em que os dados podem ser apresentados em classes etárias, ou a variável *Tamanho de uma camisola*, que pode ser medida nas categorias XS, S, M, L, XL, 2XL ou 3XL). Considerar as distribuições marginais e as distribuições condicionais e explorar a possível associação entre as variáveis. Utilizar representações gráficas adequadas.

Explorar no contexto da correlação a existência de variáveis “perturbadoras”, exemplificando.

Explorar diferentes tipos de amostragem que conduzam a amostras representativas das populações subjacentes, por oposição a processos que conduzam a amostras enviesadas.

### Bibliografia de referência

ActivAlea - Associação entre variáveis quantitativas. O coeficiente de correlação. Obtido de

[http://www.alea.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt](http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt)

ActivAlea - Associação entre variáveis qualitativas. Obtido de

[http://www.alea.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=pt](http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=pt)

ALEA - Noções de Estatística. Obtido de [https://www.alea.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=131&Itemid=1203&lang=pt](https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=131&Itemid=1203&lang=pt)

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Vigen, T. (s/d). *Correlações espúrias*. Obtido de <http://tylervigen.com/spurious-correlations>.

Graça Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Graça Martins, M. E., e Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E., e Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa).

Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Grupo de trabalho T3. (1999). *Estatística e calculadoras gráficas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Martins, H., Domingos, A. (2018). *Estatística no Secundário com Calculadora Gráfica*. Nova.Fct Editorial.

Moore, D. (2019). *STATISTICS. Concepts and controversies*. New York: W.H. Freeman and Company. :

Moore, D., e Fligne, M. A. (2021). *The Basic Practice of Statistics*. New York: W.H. Freeman and Company.

Rossman, A., e Chance, B. L. (2011). *Workshop Statistics: Discovery with Data*. Hoboken, NJ: Wiley.

## PROPOSTA 1

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>Aprofundamento do estudo de Modelos Matemáticos para a Cidadania com trabalho de projeto</b></p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos Modelos Matemáticos para a Cidadania num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos.</p> <p>Conhecer, aplicar e criar Modelos Matemáticos importantes para a Cidadania, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pôsteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Eleições com círculos eleitorais uninominais ou regionais versus um círculo nacional único;</li> <li>- Casos concretos de eleições com colégio eleitoral (Estados Unidos, Estónia, Índia,...);</li> <li>- Eleições com dados “falsificados” (Lei de Benford);</li> <li>- Estudo de diferentes modos de eleger uma Associação de Estudantes, um delegado ou um subdelegado das turmas da escola;</li> <li>- Análise de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos.</li> <li>- Cálculos das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras.</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

## Proposta 2

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>Aprofundamento do estudo de Geometria Analítica com trabalho de projeto</b></p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos.</p> <p>Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Geometria, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- História da Geometria Analítica com Descartes e Fermat;</li> <li>- Trabalhar coordenadas polares;</li> <li>- Orientar os alunos para o reconhecimento de referenciais tridimensionais em contextos reais. Por exemplo: impressoras 3D, culturas hidropónicas, software de CAD/CAM, de SIG, de navegação aérea ou de realidade virtual e aumentada;</li> <li>- Ideias para resolução de problemas em Geometria.</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

## Proposta 3

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>Aprofundamento do estudo de Funções com trabalho de projeto</b></p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados às Funções num problema contextualizado, desenvolvendo competências de modelação, representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos.</p> <p>Conhecer, aplicar e criar modelos presentes nas Funções, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser negociado ou escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Funções e gráficos de funções na comunicação social;</li> <li>- Funções ao longo da história (Oresme, Kepler, Newton,...);</li> <li>- Modelação de funções a partir de dados recolhidos com sensores;</li> <li>- Modelação de funções a partir de dados consultados na Internet (Pordata, INE, OCDE, UNESCO,...);</li> <li>- Funções associadas às viagens espaciais (Projeto ARTEMIS, Projeto DART,...).</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

## Proposta 4

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>Aprofundamento do estudo de Padrões Geométricos com trabalho de projeto</b></p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos padrões geométricos num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos.</p> <p>Conhecer, aplicar e criar modelos presentes em padrões geométricos, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Trabalho de investigação sobre a vida e obra de M. C. Escher.</li> <li>- Relação de fractais com a arte e a natureza.</li> <li>- Programação em Phyton para a criação de um padrão.</li> <li>- Entre aspetos da cultura tipicamente portuguesa, tal como tapetes de arraiolos, calçada portuguesa, azulejo português, estudar e relacionar com padrões geométricos.</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

**Bibliografia de referência (trabalhos de projeto)**

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Amado, N., e Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/15482>.
- George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de: <https://www.edutopia.org/project-based-learning>.
- Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/6872>.
- Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., e Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>GEOMETRIA ANALÍTICA</b></p> <p>Geometria analítica no plano</p> <p>Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano</p> <p>Coordenadas de pontos num referencial cartesiano</p> <p>Conjuntos de pontos e condições</p> <p>Equação reduzida da reta no plano e a equação <math>x = x_0</math></p>	<p>Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano ortogonal e monométrico.</p> <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Simetrias de pontos, em relação a retas horizontais, a retas verticais e à origem, através de coordenadas;</li> <li>- Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.</li> </ul> <p>Identificar, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem conjuntos de pontos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- semiplanos;</li> <li>- outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções em casos simples.</li> </ul> <p>Reconhecer, analisar e aplicar, a equação de uma reta, na resolução de problemas.</p>	<p>Propor atividades que evidenciem a necessidade do uso de um referencial no plano. Por exemplo: na resolução de um problema, encontrar o referencial mais adequado à figura apresentada.</p> <p>Usar software de geometria dinâmica para explorar, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- coordenadas de pontos simétricos em relação à origem, aos eixos coordenados e a retas paralelas aos eixos coordenados;</li> <li>- condições que definam conjuntos de pontos (incluindo o conjunto vazio).</li> </ul> <p>Promover a resolução de problemas para determinar a equação de uma reta ou as coordenadas do ponto de interseção entre duas retas.</p> <p>Sugerir a construção de um programa simples em <i>Python</i> que permita determinar a equação reduzida de uma reta, dadas as coordenadas de dois pontos.</p> <p>Propor problemas de modelação matemática, recorrendo à tecnologia, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Encontrar a melhor localização para propagadores de sinal de</li> </ul>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p>

		<p>Wifi num local;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Encontrar localizações em mapas geográficos (atividades tipo Mapa do Tesouro);</li> <li>- Encontrar localizações numa cidade (por exemplo, muitas cidades americanas têm ruas e avenidas numeradas - 17th street, 5th avenue, etc.);</li> <li>- Escrever a equação da reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos utilizando a regressão linear.</li> </ul>	<p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p>
<p><b>Geometria analítica no espaço</b></p> <p><b>Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no espaço</b></p> <p><b>Coordenadas de pontos num referencial cartesiano</b></p>	<p>Identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial cartesiano ortonormado e monométrico.</p> <p>Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional.</p> <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- equações de planos paralelos aos planos coordenados;</li> <li>- equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos.</li> </ul>	<p>Propor atividades aos alunos que evidenciem a necessidade do uso de um referencial no espaço. Por exemplo: na resolução de um problema, encontrar o referencial mais adequado à figura apresentada.</p> <p>Incentivar os alunos a construírem modelos tridimensionais usando materiais simples (cartão, palhinhas, rede, etc.).</p> <p>Estimular os alunos a utilizarem o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo geometria no espaço.</p> <p>Orientar os alunos para o reconhecimento de referenciais tridimensionais em contextos reais. Por exemplo: impressoras 3D, culturas hidropónicas, software de CAD/CAM, de SIG, de navegação aérea ou de realidade virtual e aumentada.</p>	<p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p> <p>Domina a capacidade perceptivo-motora (imagem corporal, direccionalidade, afinamento perceptivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>

### Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para determinar o declive, a ordenada na origem, a equação reduzida e uma equação vetorial da reta que passa por 2 pontos, a partir das suas coordenadas.

```
xA=3
yA=-1
xB=-4
yB=-2
if xA==xB:
    print('A reta que une os dois pontos é vertical: x=',xA)
else:
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    b= yA-m*xA
    print('Declive da reta: ',m)
    print('Ordenada na origem: ',b)
    print('y=',m,'x+',b)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

### Possíveis aprofundamentos

Sugerem-se outros temas para ir mais além (ou para aprofundamento):

- Pontos notáveis de um triângulo.
- Resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática usando pontos notáveis do triângulo.
- História da Matemática: os primórdios da Geometria Analítica com Descartes e Fermat
- Ideias para resolução de problemas em Geometria
- Papel da demonstração em Matemática

Ideias para composições matemáticas: A Geometria na “República” de Platão, a Geometria dos ORIGAMI, a Geometria dos templos japoneses.

### Bibliografia de referência

- Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra*. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>
- Khan Academy (s/d). *Geometria Analítica*. Obtido de <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/analytic-geometry-topic>
- Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.
- Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>FUNÇÕES</b></p> <p>Generalidades acerca de funções</p>	<p>Identificar gráfico e a representação gráfica de uma função; usar o teste da reta vertical.</p> <p>Determinar o domínio e o contradomínio de funções definidas em intervalos reais ou união finita de intervalos reais.</p> <p>Determinar pontos notáveis tendo por base a representação gráfica de funções (interseções com os eixos coordenados, extremidades dos intervalos do domínio, máximos e mínimos).</p> <p>Construir tabelas de variação de sinal e de monotonia.</p>	<p>Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras), nomeadamente para resolver problemas, explorar, investigar e comunicar.</p> <p>Usar exemplos com significado para os alunos, quando possível.</p> <p>Fomentar a interpretação da informação em situações do quotidiano (tabelas, gráficos, textos) e analisar criticamente dados, informações e resultados obtidos.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância. (B)</p>
<p>Funções Polinomiais</p> <p>Funções polinomiais de grau não superior a 3</p>	<p>Estudar intuitivamente propriedades (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia e extremos) de uma função polinomial de grau não superior a 3.</p> <p>Conhecer a fórmula resolvente para resolver equações do 2.º grau.</p>	<p>Promover a comunicação, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.</p> <p>Dinamizar a resolução de problemas, em contexto real, para calcular os zeros de uma equação de 2.º grau, aplicando a fórmula resolvente.</p> <p>Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para determinação das soluções de uma equação quadrática.</p>	<p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo. (C)</p>

	<p>Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função <math>f(x) + a</math> e <math>f(x + b)</math>, com <math>a, b \in \mathbb{R}</math> a partir do gráfico de uma função <math>f(x)</math>, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p>	<p>Conduzir os alunos a interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função <math>f(x) + a</math> e <math>f(x + b)</math>, com <math>a, b \in \mathbb{R}</math> a partir do gráfico de uma função <math>f(x)</math>, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p>	<p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p>
<p><b>Funções Inversas</b></p> <p><b>Generalidades</b></p> <p><b>Função raiz quadrada e raiz cúbica</b></p>	<p>Identificar funções invertíveis e não invertíveis: usar o “teste da reta horizontal”.</p> <p>Conhecer e interpretar a relação entre o domínio e contradomínio de funções inversas e a simetria das suas representações gráficas relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.</p> <p>Estudar intuitivamente, com auxílio da tecnologia gráfica, o comportamento de funções com radicais quadráticos e radicais cúbicos.</p> <p>Utilizar métodos gráficos para resolver equações e inequações, no contexto da resolução de problemas.</p>	<p>Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras) para estudar funções invertíveis e comparar gráficos de funções e das suas inversas.</p> <p>Propor o estudo de modelos simples de funções definidas por um radical quadrático ou por um radical cúbico, a partir da compreensão das relações numéricas entre duas variáveis que verificam uma relação de dependência quadrática ou cúbica.</p>	<p>É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p><b>Modelação com funções</b></p>	<p>Resolver problemas simples de modelação matemática, no contexto da vida real, que envolvam funções polinomiais e funções com radicais quadráticos e cúbicos.</p>	<p>Criar condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de resolver problemas e atividades de modelação ou desenvolver projetos, com ênfase especial no trabalho em grupo.</p>	

## Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para determinar as soluções de uma equação do 2.º grau:

```
import math
a=2
b=1
c=-3
delta=b**2-4*a*c
if delta<0:
    print("Não tem soluções")
elif delta==0:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem só uma solução: ',x1)
else:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

## Possíveis aprofundamentos

Caracterizar o gráfico de uma função quadrática como sendo o conjunto de pontos a igual distância de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz).

## Bibliografia de referência

- Caraça, B.J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Copérnico, N. (2014). *A revolução das orbes celestes*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.
- Guichard, J. P. (1986). História da Matemática no ensino da Matemática. Em A. Bouvier (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedic/Nathan, 1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>.
- Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.
- Icart, J. (2021). *Fonctions: Une Perspective Historique*. Revue MathémaTICE, nº 75, maio 2021. Obtido de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>.
- SESAMATH (2019). *Manuel MATHS première*. Magnard. Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=ms1spe\\_2019](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019).
- Teixeira, P. et al. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P. et al. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>PADRÕES GEOMÉTRICOS</b></p> <p>A Matemática no património</p>	<p>Analisar geometricamente problemas históricos ou exemplares do património artístico.</p> <p>Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico no estudo de problemas históricos ou do património artístico.</p>	<p>Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa, selecionando problemas históricos ou exemplares do património artístico, como por exemplo, recorrer ao SIPA (Sistema de Informação do Património Arquitetónico) e escolher 2 edifícios emblemáticos do nosso património, descrevendo as pavimentações existentes.</p> <p>Promover o estudo de um artista ou pintor que utilize pavimentações no seu trabalho, escolher duas obras do mesmo e descrever as pavimentações existentes (por exemplo, Amadeo Souza-Cardoso, Almada Negreiros ou Maurits Escher).</p> <p>Apresentar e descrever um problema histórico com a aplicação de pavimentações (por exemplo, o puzzle Stomachion de Arquimedes, o teorema das quatro cores ou padrões de degrau encontrados em manuscritos Celtas).</p> <p>Dar a conhecer o conceito de fractal e apresentar alguns exemplos, tais como o triângulo de Sierpynsky ou o floco de neve de Koch.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância. (B)</p> <p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)</p> <p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade. (D)</p>
<p><b>Pavimentações</b></p> <p><b>Padrões</b></p>	<p>Determinar a amplitude dos ângulos internos de um polígono regular.</p> <p>Reconhecer e construir as pavimentações regulares e semirregulares no plano e classificá-las.</p>	<p>Propor a identificação de uma pavimentação regular e uma semirregular, no meio circundante (escola, cidade, habitação, etc.), ou na calçada portuguesa e estudar as suas características, tais como: as figuras geométricas que as compõem e calcular a área das figuras da região fundamental.</p> <p>Promover o estudo de pavimentações regulares e semirregulares, recorrendo a materiais manipuláveis.</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a</p>

<p><b>Isometrias</b></p> <p><b>Frisos</b></p> <p><b>Rosáceas</b></p>	<p>Reconhecer e aplicar isometrias no plano.</p> <p>Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas.</p> <p>Estudar padrões geométricos planos, em particular frisos e rosáceas.</p> <p>Representar e construir modelos de composição de objetos geométricos no plano.</p>	<p>Incentivar a construção de frisos e rosáceas, utilizando transformações geométricas num software de geometria dinâmica para investigar as propriedades das transformações geométricas (translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante).</p> <p>Fomentar a recolha de imagens da arte decorativa, nomeadamente entre as do património artístico nacional ou dos países de origem dos alunos, para analisar simetrias e classificar os frisos, utilizando um fluxograma ou uma chave dicotómica.</p>	<p>construir consensos. (E)</p> <p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p> <p>Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)</p>
--	--	---	--

### Possíveis aprofundamentos

Podem ainda ser referidas as pavimentações não regulares do plano desenvolvidas pelo matemático e físico Roger Penrose (Prémio Nobel da Física em 2020). Pode ser realizada em sala de aula uma atividade semelhante à relatada em:

Terroso, J. (2015). A exploração de isometrias nas Pavimentações de Penrose numa turma de 8.º ano, *Educação & Matemática*, nº 134, p. 17-22. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>.

O uso do software português GECLA (abreviatura de Gerador e Classificador) desenvolvido pelo Atractor fornece uma excelente oportunidade para explorar padrões, frisos e rosáceas. Permite gerar no plano um padrão, um friso, ou uma rosácea, com um determinado tipo de simetria previamente escolhido, a partir de um motivo assimétrico. Permite também classificar (com ou sem ajuda do programa) padrões, frisos, ou rosáceas assim obtidos. Pode ser usado também no formato competição. O software GECLA pode ser descarregado aqui: <https://www.atractor.pt/mat/GeCla/>

### Bibliografia de referência

Atractor. (2018). A Matemática dos Azulejos. *Gazeta de Matemática*, nº 186, p. 3-9. Obtido de <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1484>

Bastos, R. (2006). Simetria. *Educação & Matemática*, nº 88, p. 9-11. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>

Ricardo Teixeira (s/d). <http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/>

*Rota das Simetrias da Calçada Portuguesa de Lisboa*. Obtido de [https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/RotaSimetrias\\_INFO.pdf](https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/RotaSimetrias_INFO.pdf)

*Science for All: Symmetries and Group Theory*. Obtido de <http://www.science4all.org/article/symmetries/>

*Tessellation Artists around the Globe*. Obtido de <https://tessellations.ca/2017/02/24/tessellation-artists-around-the-globe/>

*Transformações geométricas nos Programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário*. Obtido de <http://www.mat.uc.pt/~mat0232/Formularios/Transf.pdf>

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM.

Veloso, E. *et al.* (2009). Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis. *Educação & Matemática*, nº 101, p. 23-28. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1746>

Cofinanciado por:

