ESTATÍSTICA

Matemática A
10.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024

Ficha técnica

Título:
Coletânea de tarefas das turmas piloto - Estatística (Matemática A 10.º ano)

Autoria e adaptação:
Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:
Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:
Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em
https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:
Lisboa, abril de 2024

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - ESTATÍSTICA

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
2	Tarefa 1 Os Primeiros Passos	**Problema estatístico - Variabilidade** População, amostra e variável **Dados univariados** Dados quantitativos discretos ou contínuos	• Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento. • Reconhecer a variabilidade como um conceito chave de um problema estatístico. • Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente. • Identificar num estudo estatístico, população, amostra e a(s) caraterística(s) a estudar, que se designa(m) por variável (variáveis). • Reconhecer as fases de um procedimento estatístico: - Produção ou aquisição de dados; - Organização e representação de dados; - Interpretação tendo por base as representações obtidas. • Reconhecer os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras enviesadas cujo estudo levaria a inferir conclusões erradas para as populações. • Intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras para inferir para a população subjacente, não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como verdadeiro ou falso. • Identificar dados quantitativos discretos ou contínuos.	Trabalho a pares	• Comunicação Matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

3	Tarefa 2 Medidas de localização e de dispersão	**Dados univariados** Medidas de localização Medidas de dispersão	• Interpretar as medidas de localização: média ($\overline{x}$), mediana (Me), moda(s) (Mo) e percentis (quartis como caso especial) na caraterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas. • Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, s, (variância amostral $s2$) na caraterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.	Trabalho a pares e/ou pequenos grupos	• Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D) • É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F)
3	Tarefa 3 Qual é a seleção mais jovem?	**Dados univariados** Organização de dados Histograma	• Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las. • Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, relembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis. • Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos. • Construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude. • Conhecer que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão.	Trabalho a pares	• Tarefas e recursos educativos • Resolução de problemas, modelação e conexões	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

2	Tarefa 4 Propriedades média e desvio padrão	**Dados univariados** Propriedades das medidas	• Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”. • Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas: - Pouca resistência da média e do desvio padrão; - Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade.	Trabalho a pares	• Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
2	Tarefa 5 Comparação das idades de duas equipas	**Dados univariados** Propriedades das medidas	• Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc. • Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar, como medida de localização do centro da distribuição dos dados, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples.	Trabalho a pares	• Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

3	Tarefa 6 Será Cristiano Ronaldo o único outlier da seleção?	**Dados univariados** Organização de dados	• Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las. • Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, relembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis. • Compreender que a existência de outliers influencia estes procedimentos.	Trabalho a pares	• Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

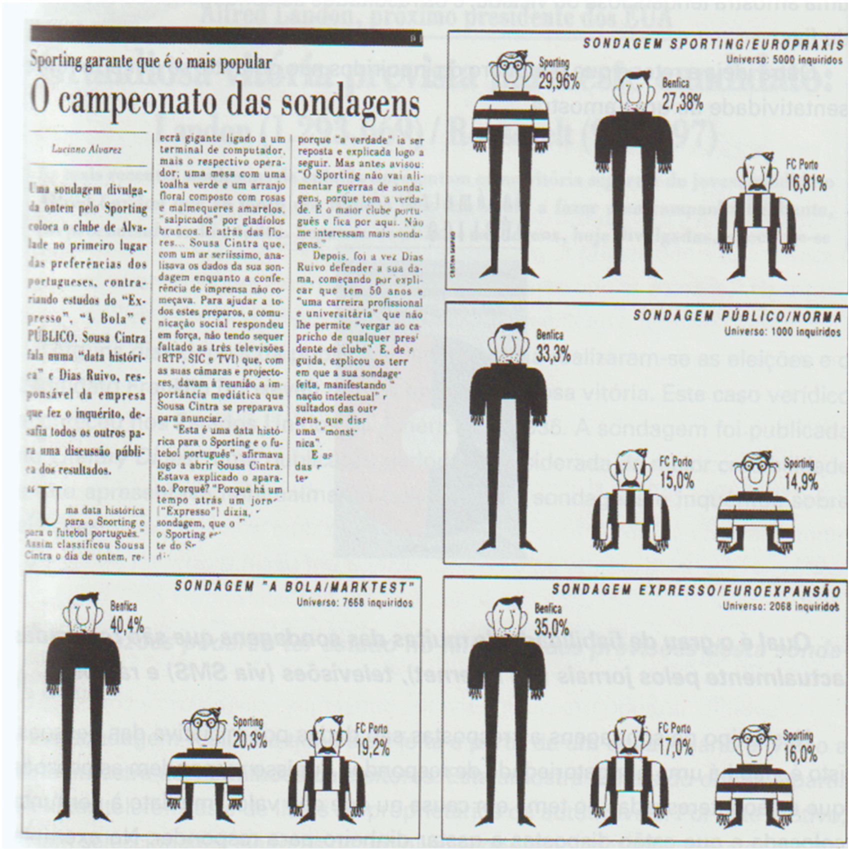
4	Tarefa 7 Correlação estatística	**Dados bivariados** Dados quantitativos Diagrama de dispersão Coeficiente de correlação linear Reta de regressão – variável independente ou explanatória - variável dependente ou resposta.	• Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis quantitativas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se uma amostra de pares de dados. • Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, direção e força da associação (linear) entre as duas variáveis. • Identificar o coeficiente de correlação linear r, como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores pertencentes a [−1,1], dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula. Recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear. • Compreender que no caso do diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados. Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão. • Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados.	Trabalho a pares	• Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

1	Tarefa 8 Quarteto curioso	**Dados bivariados** Coeficiente de correlação linear Reta de regressão – variável independente ou explanatória - variável dependente ou resposta. Gráfico de linhas	• Compreender que no caso do diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados. Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão. • Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou explanatória. • Entender que um gráfico de linhas é um caso particular de um diagrama de dispersão, em que se pretende estudar a evolução de uma das variáveis relativamente a outra variável, de um modo geral o tempo, e em que se unem, por linhas, os pontos representados.	Trabalho a pares	• Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
1	Tarefa 9 Correlação não é relação causa-efeito	**Dados bivariados** Diagrama de dispersão Coeficiente de correlação linear	• Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo.	Trabalho a pares	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Comunicação Matemática	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)

Tarefa 1

Os Primeiros Passos

1. Há algum tempo foram publicados no jornal *Público* os resultados de quatro sondagens diferentes feitas sobre «o clube português mais popular».



Sporting garante que é o mais popular

O campeonato das sondagens

Luciano Alvarez

Uma sondagem divulgada ontem pelo Sporting coloca o clube de Alvalade no primeiro lugar das preferências dos portugueses, contrariando estudos do "Expresso", "A Bola" e PÚBLICO. Sousa Cintra fala numa "data histórica" e Dias Ruivo, responsável da empresa que fez o inquérito, desafia todos os outros para uma discussão pública dos resultados.

"Uma data histórica para o Sporting e para o futebol português." Assim classificou Sousa Cintra o dia de ontem, re- [...] ecrã gigante ligado a um terminal de computador, mais o respectivo operador; uma mesa com uma toalha verde e um arranjo floral composto com rosas e malmequeres amarelos, "salpicados" por gladíolos brancos. E atrás das flores... Sousa Cintra que, com um ar seriíssimo, analisava os dados da sua sondagem enquanto a conferência de imprensa não começava. Para ajudar a todos estes preparos, a comunicação social respondeu em força, não tendo sequer faltado as três televisões (RTP, SIC e TVI) que, com as suas câmaras e projectores, davam à reunião a importância mediática que Sousa Cintra se preparava para anunciar.

"Esta é uma data histórica para o Sporting e o futebol português", afirmava logo a abrir Sousa Cintra. Estava explicado o aparato. Porquê? "Porque há um tempo atrás um jorn- ["Expresso"] dizia, [...] sondagem, que o [...] o Sporting [...] te do S[...]

porque "a verdade" ia ser reposta e explicada logo a seguir. Mas antes avisou: "O Sporting não vai alimentar guerras de sondagens, porque tem a verdade. É o maior clube português e fica por aqui. Não me interessam mais sondagens."

Depois, foi a vez Dias Ruivo defender a sua dama, começando por explicar que tem 50 anos e "uma carreira profissional e universitária" que não lhe permite "vergar ao capricho de qualquer presidente de clube". E, de seguida, explicou os terr[...] em que a sua sondage[...] feita, manifestando [...] nação intelectual" [...] sultados das out[...] gens, que dis[...] uma "monst[...]nica".

E as [...] das [...] te[...]

SONDAGEM SPORTING/EUROPRAXIS

Universo: 5000 inquiridos

Sporting 29,96%

Benfica 27,38%

FC Porto 16,81%

SONDAGEM PÚBLICO/NORMA

Universo: 1000 inquiridos

Benfica 33,3%

FC Porto 15,0%

Sporting 14,9%

SONDAGEM "A BOLA/MARKTEST"

Universo: 7668 inquiridos

Benfica 40,4%

Sporting 20,3%

FC Porto 19,2%

SONDAGEM EXPRESSO/EUROEXPANSÃO

Universo: 2068 inquiridos

Benfica 35,0%

FC Porto 17,0%

Sporting 16,0%

Como se explicam as diferenças entre os resultados destas sondagens?

2. Preenche a tabela fazendo uma pesquisa sobre os conceitos apresentados:

População	
Amostra	
Sondagem	
Censo	
Unidade estatística	

Sugestão: podes consultar a página do ALEA que podes encontrar com o QR code que se segue.

3. Lê atentamente o seguinte artigo:

Gatos de morte!

Um inquérito da Mammal Society, realizado com 964 felinos, revelou que os 7,5 milhões de gatos britânicos matam, anualmente, 300 milhões de animais, pássaros incluídos.

Surpreendentemente, os mais mortíferos são os gatos com guizo e coleira, que caçam, em média, 19 animais em cinco meses.

Gatos do campo caçam gatos da cidade.

Gatos com 2 anos são os que mais matam, embora os mais mortíferos sejam os de 8 ou 9 anos.

As vítimas incluem 15 milhões de coelhos, 3 milhões de ratos, 1,5 milhões de ratos de campo e 230 000 morcegos...

Revista *Visão*, n.º 414, Fevereiro de 2001.

3.1. Indica quais os gatos que matam mais, e, na tua opinião, porque é que apesar disso, os mais mortíferos são aqueles que têm 8 ou 9 anos.

3.2. Comenta a afirmação:
«O estudo feito aos gatos, pela Mamal Society, é uma sondagem.»

3.3. Qual é a população?

3.4. Qual é a amostra?

4. Classifica como verdadeiras (V) ou falsas (F) as seguintes afirmações. Justifica as falsas.

4.1. População é um conjunto de pessoas, objetos ou acontecimentos sobre o qual incide o estudo estatístico.

4.2. A um estudo estatístico feito a uma parte representativa da população chama-se censo.

4.3. A uma parte representativa da população sobre o qual incide a observação dá-se o nome de amostra.

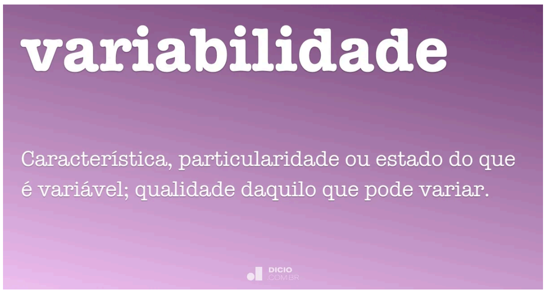
4.4. Chama-se unidade estatística a cada elemento da população.

4.5. Sondagem é um estudo estatístico feito com base na população.

5. Para te poder conhecer um pouco melhor, preenche o inquérito no link que se segue. Posteriormente, indica e classifica, quanto ao tipo, as variáveis presentes.

   https://docs.google.com/forms/d/1UfYHi9o-AruRlGABZmLpudlH3P0UMp2VgQ-WVUsxeLw/copy?ts=65280629

6. Considera uma situação do mundo real em que a variabilidade desempenha um papel importante. Pode ser relacionada à economia, saúde, clima, educação, ou qualquer outro aspecto da vida quotidiana. Descreve essa situação, e explica como a variabilidade afeta as decisões ou resultados nesse contexto. Além disso, discute como a compreensão dessa variabilidade pode ajudar a tomar decisões mais informadas ou a lidar melhor com essa situação.



7. Procura na internet, em jornais ou em revistas uma reportagem na qual inclui um estudo estatístico. Relativamente a esse estudo estatístico, indica:
   - Se foi feito um censo ou se uma sondagem
   - A população
   - Caso exista, o tamanho da amostra
   - As variáveis estatísticas em estudo, classificando-as

8. Comenta uma das seguintes afirmações:

> Claro, aqui estão algumas frases que destacam a importância da estatística:
>
> 1. "A estatística é a linguagem dos dados, permitindo-nos decifrar os segredos do mundo que nos rodeia."
> 2. "Na era da informação, a estatística é a chave que abre as portas para o conhecimento e a sabedoria."
> 3. "A estatística transforma números em histórias, revelando padrões ocultos e fazendo com que os dados falem."

Fonte: Chat GPT

Tarefa 1

Os Primeiros Passos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo fazer a introdução do tema estatística. Para isso, os alunos pesquisam na internet para recordar os conceitos aprendidos no ensino básico e refletirem sobre a variabilidade e a importância dos dados estatísticos e da estatística.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noções de Estatística aprendidas no Ensino Básico

Materiais e recursos: Acesso à Internet

Notas e sugestões:

Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 2 tempos letivos (100 minutos).

Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares para a resolução da tarefa.

Propõe-se 70 minutos para a sua resolução e o restante tempo para discussão e apresentação das conclusões no grupo turma.

O professor irá observando o desempenho dos alunos e fornecendo as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis situações.

Espera-se que os alunos possam manifestar algumas dificuldades em:

- conhecer o vocabulário específico, como por exemplo população, amostra;
- ao nível da comunicação e expressão de ideias com o vocabulário adequado.

Tarefa 2

Medidas de localização e de dispersão

Parte I - Ir de férias com bom tempo

Na Primavera passada, uma agência de turismo decidiu levar a cabo uma campanha publicitária, tendo produzido folhetos nos quais era sugerida uma semana de férias, em junho, numa das cidades: Santa Madalena ou Monte Rodrigo. Nos folhetos informava-se que, em ambos os destinos, eram esperadas temperaturas médias do ar semelhantes, situadas entre 22°C e 23°C.

De 12 a 19 de junho, a agência recebeu um grupo de turistas em cada uma das cidades. No final, alguns dos turistas que estiveram em Santa Madalena queixaram-se do tempo, porque a temperatura do ar não tinha correspondido ao que esperavam. Pelo contrário, o grupo que ficou em Monte Rodrigo parecia satisfeito com o tempo que se fez sentir.

Será que as reações dos dois grupos de turistas são justificadas? Será que a agência de viagens deu uma informação incorreta?...

A tabela apresenta as temperaturas médias diárias que se fizeram sentir nos 8 dias de junho, em cada uma das cidades:

	Santa Madalena	Monte Rodrigo
Data	Temperatura média diária (°C)	Temperatura média diária (°C)
12/06	20,1	22,1
13/06	17,4	19,9
14/06	22,0	21,6
15/06	27,0	24,8
16/06	28,7	24,1
17/06	24,3	22,5
18/06	20,7	22,0
19/06	19,0	22,2

1. Calcula a média das temperaturas que se registaram, em cada uma das cidades, nos 8 dias do mês de junho.

2. Determina o valor máximo, o valor mínimo e a amplitude das temperaturas registadas, em cada uma das cidades. A partir dos resultados, consegues explicar melhor o que os dois grupos de turistas sentiram?

3. Constrói um gráfico de linhas (gráfico de série temporal) com as temperaturas ao longo dos 8 dias, representando no mesmo gráfico as temperaturas das duas cidades. O que concluis da análise do gráfico?

4. Há turistas que não gostam de locais de férias com grandes variações térmicas. Calcula, para cada cidade, os oito desvios diários relativamente à média das temperaturas, ou seja, a diferença entre cada registo e a média das temperaturas. Analisa os resultados obtidos. O que concluís sobre a cidade com maior variabilidade de temperatura, naquele período?

5. Fazendo a média dos desvios diários, para cada caso, consegues obter mais informação sobre a variabilidade das temperaturas nas duas cidades? Justifica.

6. A variância amostral[1] (s^2) das temperaturas é dada pela soma dos quadrados dos desvios dividida por $n-1$, sendo n o número de observações (usamos $n-1$ porque os dados se referem apenas a uma amostra). Calcula a variância amostral para cada cidade e compara os valores. Tens agora mais informação sobre a variabilidade de cada conjunto de dados? Justifica.

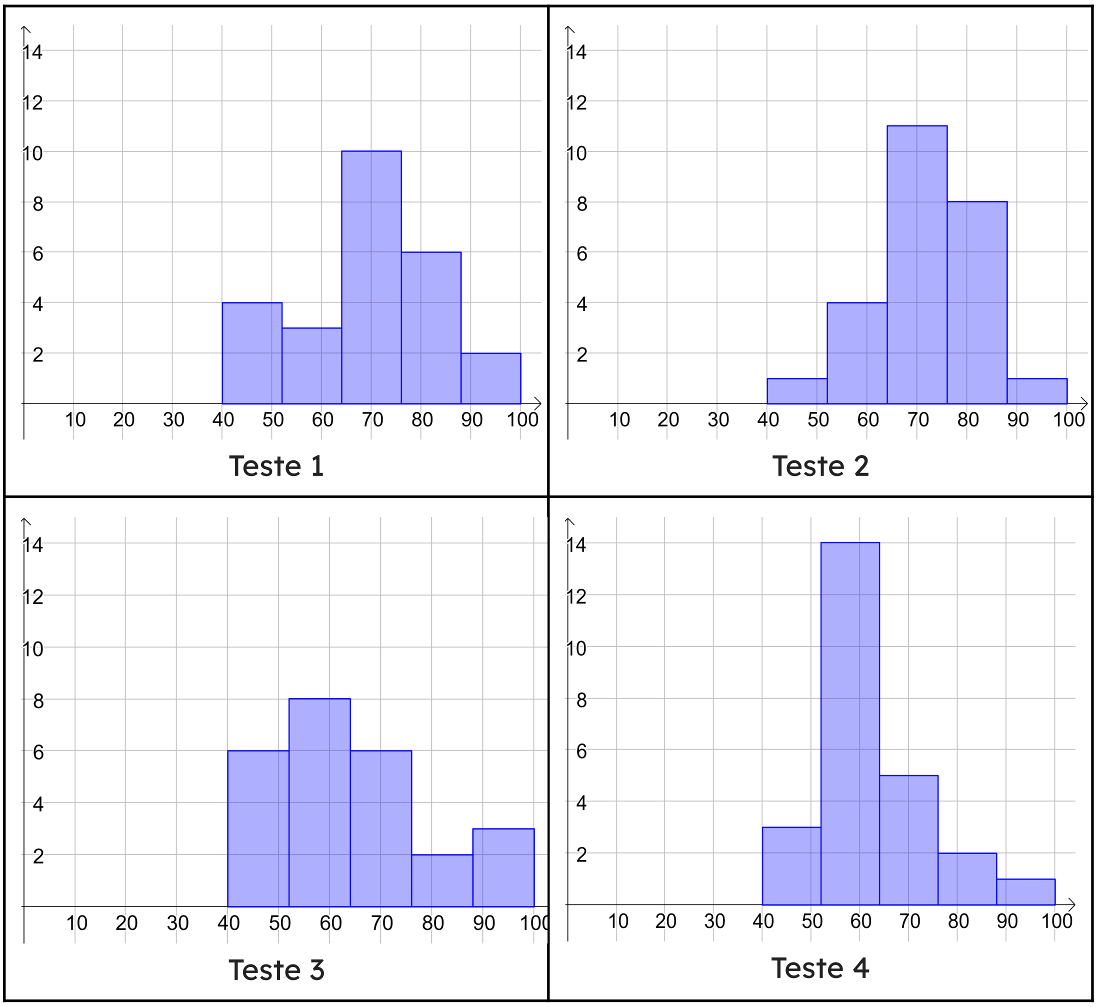
7. O desvio-padrão amostral (s) é dado pela raiz quadrada da variância amostral e exprime-se na mesma unidade de medida que os dados (°C). Calcula o desvio-padrão amostral para cada caso. Relaciona os valores dos desvios padrão das temperaturas em cada uma das cidades com a respetiva variabilidade.

8. Comenta a frase: "*Os turistas que estiveram em Santa Madalena ficaram aborrecidos porque a agência de viagens lhes transmitiu uma informação enganadora*".

[1] Estamos a considerar a variância amostral e o desvio padrão amostral porque envolvem somente as observações disponíveis, que se referem a apenas 8 dias de um mês.

Parte II - Testes

O professor Artur está a analisar as notas dos testes de avaliação aplicados aos alunos da turma do 9.º K. Construiu histogramas que apresentam as classificações dos 4 testes, que são reproduzidos a seguir:



Calculou também a média e o desvio padrão de cada um dos conjuntos de classificações e registou-os na tabela seguinte:

	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
Média	62	69	62	71
Desvio padrão	18	14	9	8

Depois percebeu que os histogramas não tinham sido copiados na ordem correta. Sem efetuares cálculos, associa a cada histograma o número do teste correspondente. Justifica a tua resposta.

Tarefa 2

Medidas de localização e de dispersão

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa é exploratória tendo como objetivo o primeiro contacto com a variância e o desvio padrão amostral.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de Média

Materiais e recursos: Folha de cálculo ou calculadora gráfica

Notas e sugestões:

Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 3 tempos letivos (150 minutos).

Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares e/ou pequenos grupos para a resolução da tarefa..

Propõe-se os 2 primeiros tempos para a resolução da Parte II da tarefa. O 3º tempo será iniciado com a discussão e apresentação das conclusões no grupo turma da Parte I da tarefa (25 minutos) e o restante tempo será dedicado à análise e discussão da Parte II da tarefa.

Espera-se que os alunos possam manifestar algumas dificuldades em:

- a construção manual de gráficos;
- a utilização da folha de cálculo;
- ao nível da comunicação e expressão de ideias com o vocabulário adequado.

Nas questões 6 e 7 caberá ao professor explicar aos alunos, caso considere adequado, que se utiliza *n-1* e não *n* no cálculo da variância e do desvio padrão amostral, já que os dados se referem apenas a uma amostra e não à população, por razões que se prendem com a inferência estatística, fora do âmbito das aprendizagens essenciais do 10.º ano.

Tarefa 3

Qual é a seleção mais jovem?

Nas tabelas 1 e 2 apresentam-se alguns dados relativos aos futebolistas internacionais pela Seleção A de Portugal. A tabela 1 diz respeito aos jogadores que participaram no Europeu de 2016, em França (onde nos consagrámos campeões europeus) e, a tabela 2, é relativa aos jogadores que representaram o nosso país no Mundial de 2022, no Qatar.

Tabela 1

Jogadores Seleção A - Europeu de França 2016		
Nome	Idade (anos)	Altura (cm)
Eduardo	33	187
Anthony Lopes	25	184
Rui Patrício	28	190
Bruno Alves	34	189
Cédric	24	172
Danilo Pereira	24	177
Eliseu	32	176
José Fonte	32	187
Pepe	33	188
Raphael Guerreiro	22	170
Ricardo Carvalho	38	183
Vieirinha	30	172
Adrien Silva	27	176
André Gomes	22	188
João Mário	23	179
João Moutinho	29	170
Renato Sanches	18	173
William Carvalho	24	187
Éder	28	188
Cristiano Ronaldo	31	187
Nani	29	175
Rafa Silva	23	170
Ricardo Quaresma	32	173

Tabela 2

Jogadores Seleção A - Mundial do Qatar 2022		
Nome	Idade (anos)	Altura (cm)
Diogo Costa	24	187
José Sá	30	192
Rui Patrício	34	190
Diogo Dalot	23	185
João Cancelo	28	182
António Silva	19	187
Danilo Pereira	31	177
Pepe	39	188
Rúben Dias	25	187
Nuno Mendes	20	175
Raphael Guerreiro	28	170
João Palhinha	27	190
Rúben Neves	25	180
Bernardo Silva	28	173
Bruno Fernandes	28	179
João Mário	29	179
Mateus Nunes	25	183
Octávio	28	173
Vitinha	22	173
William Carvalho	30	187
André Silva	25	181
Gonçalo Ramos	21	185
Cristiano Ronaldo	37	187
João Félix	23	181
Rafael Leão	23	188
Ricardo Horta	28	173

1. Classifica as variáveis estatísticas, apresentadas na tabela 1, quanto ao tipo (qualitativo ou quantitativo – discreto ou contínuo).

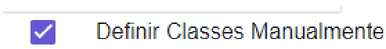
2. Comenta a seguinte afirmação: “Os jogadores da Seleção A presentes no Euro 2016 eram, em média, mais jovens do que os jogadores que participaram no Mundial do Qatar de 2022”.

3. Calcula e compara o desvio padrão das idades dos jogadores que representaram a seleção nacional em 2016 e em 2022 (4 c.d.). Relativamente à idade dos jogadores, qual das seleções apresentou menor variabilidade?

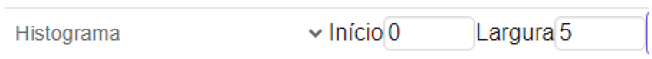
4. Considera as idades dos jogadores apresentadas nas tabelas 1 e 2.
   4.1. Constrói um diagrama de caule-e-folhas paralelo das idades dos jogadores no Europeu e no Mundial.
   4.2. Utiliza o diagrama de caule-e-folhas, construído em 1.4.1., e elabore uma pequena composição onde estabeleça comparações entre as idades dos jogadores do Europeu 2016 e do Mundial 2022.

5. Tal como as tabelas, os gráficos, nomeadamente os histogramas, são outra forma de representar os dados estatísticos. Recorrendo à apliqueta do GeoGebra disponível em https://www.geogebra.org/m/s5mwgmkb (ou através do QR code ao lado) e, alterando o limite inferior da primeira classe e a amplitude das classes, procura histogramas que te permitam responder às três questões seguintes.

Notas para a utilização da apliqueta:

- Clica na roda dentada das definições: 
- Ativa a opção “definir classes manualmente”: 

- Em seguida altera o dado do início e a largura (amplitude) das classes:



Questões:

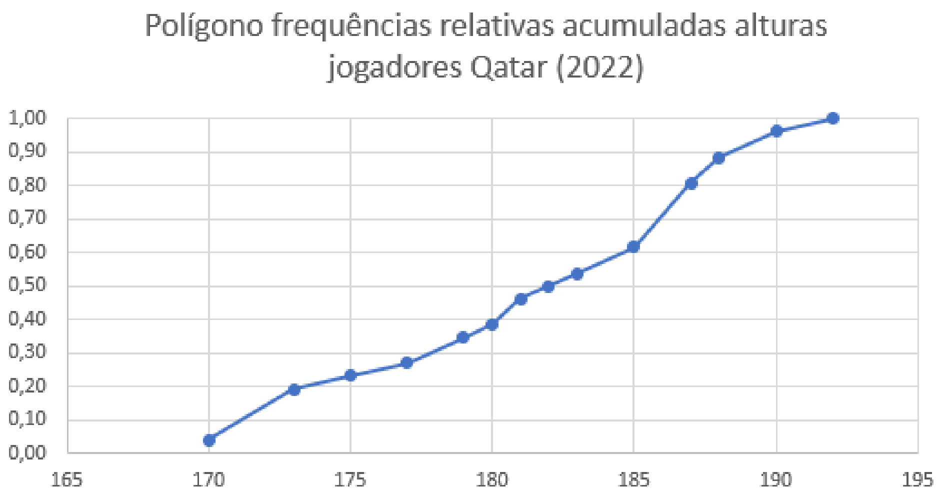
I. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior a 180 cm?

II. Quantos jogadores têm mais de 175 cm de altura?

III. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior a 180 cm e inferior ou igual 187,5 cm?

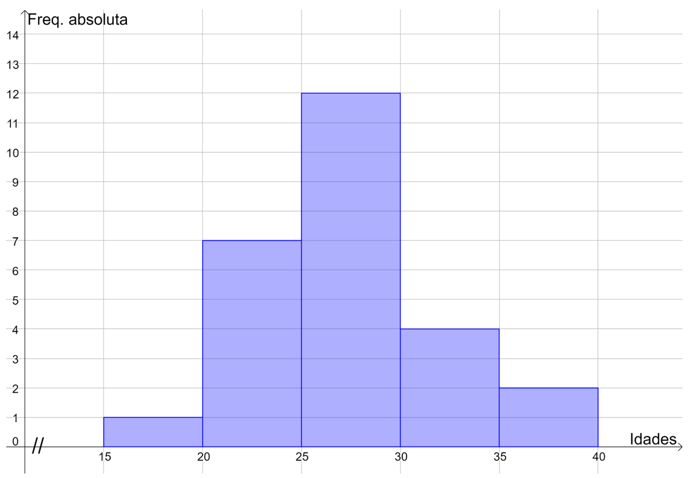
Responde às questões I, II e III e apresenta os histogramas respetivos.
Apresenta os resultados das questões I e III arredondados às unidades.

6. A partir do gráfico de linhas seguinte, indica, aproximadamente, o percentil da altura do jogador Nuno Mendes.



Indica, aproximadamente, o percentil da estatura do mesmo jogador, consultando a tabela disponível em https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf (ou através do QR Code ao lado), que representa os percentis da altura (estatura) da população portuguesa até aos vinte anos. Compara e comenta os valores obtidos.

7. A partir do histograma a seguir representado com as idades dos jogadores em 2022, determina valores aproximados para a média e o desvio-padrão, e compara com os valores obtidos nas questões 1.2 e 1.3.



Tarefa 3

Qual é a seleção mais jovem?

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa é de resolução de exercícios e problemas, bem como de promoção da comunicação matemática. Os alunos devem comparar a média e a variabilidade de dois conjuntos de dados. Pretende-se também desenvolver a competência de construção de gráficos e a interpretação da informação contida em vários tipos de gráficos (caule-e-folhas, linhas e histogramas).

Conhecimentos prévios dos alunos: Diagrama de caule-e-folhas, gráfico de linhas, média e desvio padrão

Materiais e recursos: Folha de cálculo ou calculadora gráfica e ligação à internet

Notas e sugestões:

Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 3 tempos letivos (150 minutos).

Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares e/ou pequenos grupos para a resolução da tarefa. Sugere-se que nos dois primeiros tempos seja feita a resolução até à questão 1.4.2. (70 minutos), seguida da discussão e apresentação de conclusões (30 minutos). No terceiro tempo de 50 minutos deverá ser feita a resolução, por parte dos alunos (30 minutos), seguida da discussão e apresentação de conclusões (20 minutos).

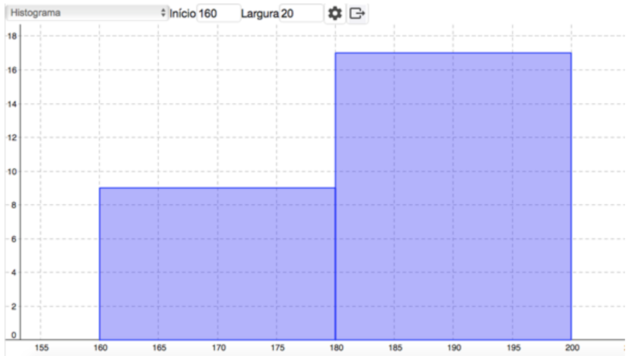
Espera-se que os alunos possam manifestar algumas dificuldades em:

- a construção do diagrama de caule-e-folhas paralelo;
- a utilização da apliqueta geogebra, nomeadamente, na definição do limite inferior da primeira classe e amplitude das classes;
- ao nível da comunicação e expressão de ideias com o vocabulário adequado;
- na questão 1.7., onde poderá ser necessário abordar com os alunos a noção de "Marca da Classe" e para que é utilizada.

No que se refere à questão 1.5. o objetivo é que os alunos explorem a leitura do histograma. Não é expectável que os alunos respondam a cada uma das questões utilizando o mesmo histograma. Na discussão da tarefa, cabe ao professor analisar as várias resoluções dos alunos.

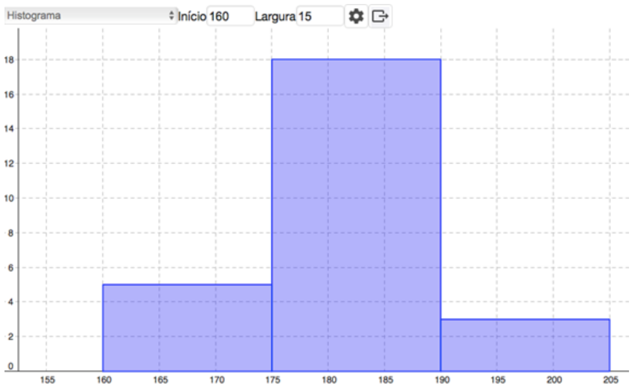
Apresentam-se exemplos de histogramas que podem ser construídos para responder às questões solicitadas:

I. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior ou igual a 180 cm?



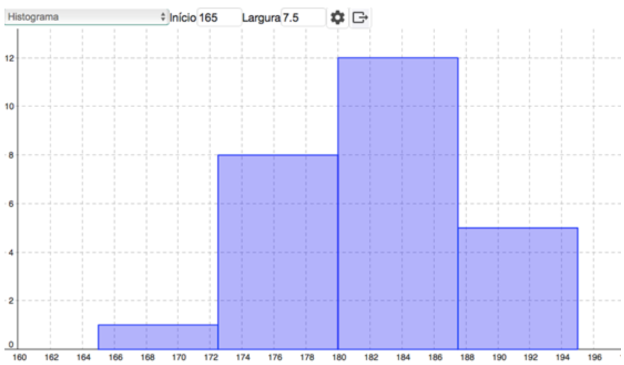
Resposta : $17/26 \times 100 \approx 65{,}38\%$

II. Quantos jogadores têm, pelo menos, 175 cm de altura?



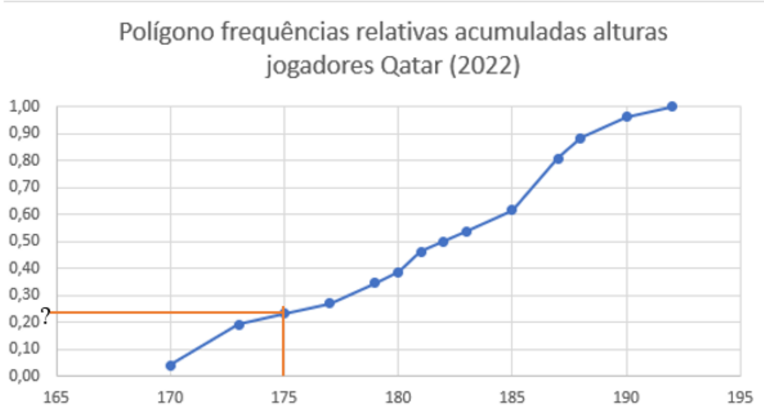
Resposta: 21 jogadores.

III. Qual é a percentagem de jogadores com altura superior ou igual a 180 cm e inferior a 187,5 cm?

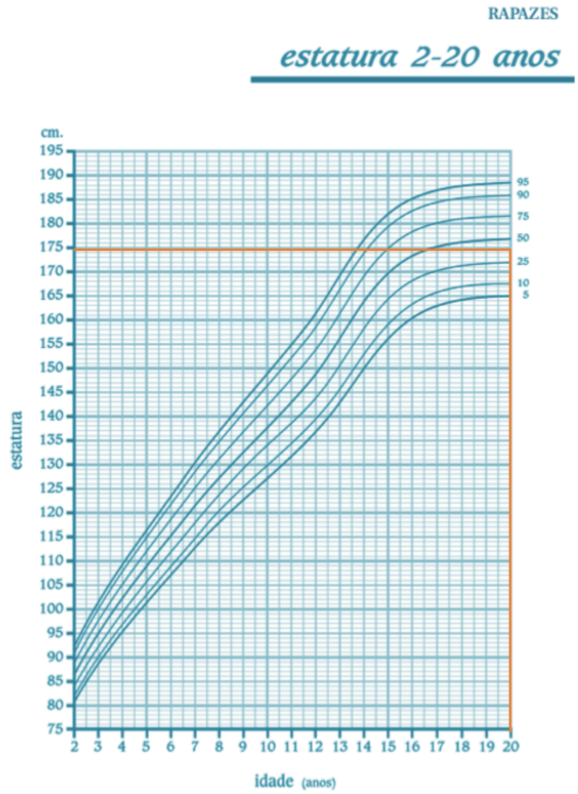


Resposta : $12/26 \times 100 \approx 46{,}15\%$

Na questão 1.6. o aluno deverá fazer uma estimativa do percentil solicitado, usando o gráfico poligonal de frequências relativas acumuladas. Não se pretende a aplicação de nenhum processo analítico.



Na segunda parte da questão deve ser consultada a página 12 do documento da seguinte ligação: https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf,



O valor do percentil da altura do jogador Nuno Mendes é mais alto face à população portuguesa, dos rapazes com idade de 20 anos, do que face aos jogadores convocados para o Mundial 2022.

Tarefa 4

Propriedades da média e do desvio padrão

As tabelas 1 e 2 dizem respeito a alguns jogadores da seleção portuguesa que estiveram presentes em ambas as competições: Europeu 2016 e no Mundial 2022 .

Tabela 1

Jogadores seleção A França 2016	
Nome	Idade (anos)
Rui Patrício	28
Pepe	33
Raphael Guerreiro	22
João Mário	23
William Carvalho	24
Cristiano Ronaldo	31

Tabela 2

Jogadores seleção A Qatar 2022	
Nome	Idade (anos)
Rui Patrício	34
Pepe	39
Raphael Guerreiro	28
João Mário	29
William Carvalho	30
Cristiano Ronaldo	37

1. Com base na tabela 1, determina, a média e o desvio padrão com aproximação às centésimas, das idades dos sete jogadores.

2. Qual será a média e o desvio padrão das idades desses sete jogadores em 2022, com aproximação às décimas? Justifica a tua resposta.

3. Duplica o valor da idade de cada jogador da tabela 1. Recorrendo a uma calculadora gráfica ou um folha de cálculo, determina a média e o desvio padrão do conjunto de dados obtido. Procede de forma análoga, triplicando os valores das idades.
   O que observaste relativamente aos valores da média e do desvio padrão, para cada uma das situações?

4. **(Opcional)** Uma forma alternativa de determinar a média e o desvio padrão dos conjuntos de dados referidos na questão 3, pode ser, por exemplo, recorrer a um programa em linguagem Python. Altera o programa seguinte por forma a confirmar os valores calculados em 3.

```
import math
idades=[14,16,14,15,17,23]
soma=0
for i in range(6):
   soma=soma+idades[i]
media=round(soma/6,1)
desvios=0
for i in range(6):
   desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=round(math.sqrt(desvios/5),3)
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Média:', media)
```

Tarefa 4

Propriedades da média e do desvio padrão

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa é exploratória tendo como objetivo conjeturar e justificar propriedades da média e do desvio padrão, nomeadamente, prever as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”.

Conhecimentos prévios dos alunos: Média e desvio padrão.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica (com python) ou computador com ligação à internet (emulador python, Google Colab).

Notas e sugestões:
Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 2 tempos letivos (100 minutos).
Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares e/ou pequenos grupos, para a resolução da tarefa.
Sugere-se que o cálculo das medidas estatísticas seja feito recorrendo à tecnologia (folha de cálculo ou calculadora gráfica).
Na questão 2, pretende-se que os alunos não necessitem de determinar as medidas estatísticas e consigam conjeturar esses valores. Alguns alunos poderão conjeturar logo o resultado, no entanto, outros irão determiná-los. Na discussão das tarefas devem ser abordadas as duas metodologias.
Ao contrário da questão 2, na questão 3, não é expectável que os alunos, inicialmente, façam uma conjetura. Assim, sugere-se que, tal como indicado na questão, os alunos recorram às tecnologias para determinar esses valores. Na discussão e apresentação de conclusões, essas conjeturas devem ser abordadas e verificadas analiticamente.
A questão 4, embora opcional, poderá ser uma boa oportunidade para introduzir a linguagem python e abordar o pensamento computacional, uma das ideias chave

das Aprendizagens Essenciais. Num primeiro momento, individualmente, cada aluno deverá fazer a leitura do programa e tentará interpretá-lo. Em grupo turma, deverá ser feita uma análise conjunta, de onde deverá resultar a tradução em linguagem natural do algoritmo. Os alunos deverão copiar e alterar o programa para determinar os valores pretendidos.

Este programa poderá ser utilizado, alterando os valores da lista (multiplicando e/ou somando constantes) para mostrar as alterações das medidas, uma vez que permite tirar conclusões análogas, de forma rápida e eficiente.

O professor irá observando o desempenho dos alunos e fornecendo as ajudas necessárias, através da colocação de questões, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis situações.

Tarefa 5

Comparação das idades de duas equipas

Considera as tabelas 1 e 2 referentes ao “onze inicial” (jogadores que iniciaram o primeiro jogo) do Europeu 2016 e do Mundial 2022.

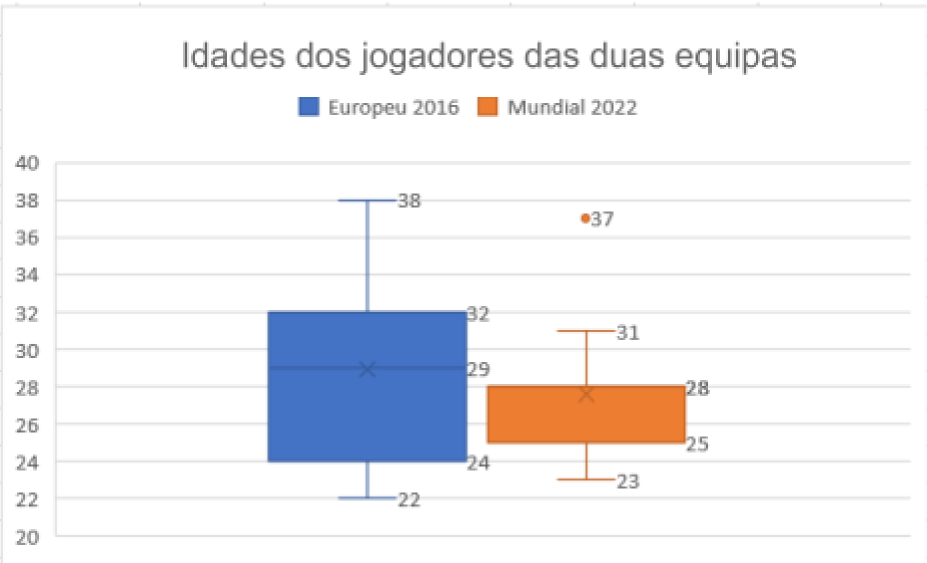
Tabela 1

Onze inicial no primeiro jogo, em 2016	
Nome	Idade (anos)
Rui Patrício	28
Pepe	33
Raphael Guerreiro	22
Ricardo Carvalho	38
Vieirinha	30
André Gomes	22
João Moutinho	29
William Carvalho	24
Cristiano Ronaldo	31
Nani	29
Ricardo Quaresma	32

Tabela 2

Onze inicial no primeiro jogo, em 2022	
Nome	Idade (anos)
Diogo Costa	24
João Cancelo	28
Danilo Pereira	31
Raphael Guerreiro	28
Rúben Neves	25
Bernardo Silva	28
Bruno Fernandes	28
Octávio	28
Cristiano Ronaldo	37
João Félix	23
Rúben Dias	25

Com base nos dados que constam da segunda coluna das tabelas 1 e 2, construiu-se a representação dos seguintes diagramas:



1. Apenas por leitura desta representação gráfica, indica o mínimo, o máximo e os quartis das idades dos jogadores no Europeu de 2016 e no Mundial de 2022, e calcula as respetivas amplitudes e amplitudes interquartis.

2. Com base no gráfico apresentado, escreve um pequeno texto onde faças uma análise comparativa das idades dos jogadores no Europeu de 2016 e no Mundial de 2022.

3. Considera, agora, apenas as idades dos jogadores no Mundial (tabela 2).
   3.1. Calcula a média e o desvio padrão das idades dos jogadores referidos.
   3.2. Sabendo que o Cristiano Ronaldo saiu lesionado ao intervalo, entrando para o seu lugar o jovem Gonçalo Ramos, de 21 anos, o que achas que acontecerá aos valores da média e do desvio padrão, dos jogadores que iniciaram a segunda parte do jogo? Justifica.

4. De entre as medidas de localização (moda, média e mediana) qual escolherias para caracterizar a distribuição das idades dos onze iniciais, em cada um dos jogos? Justifica.

Tarefa 5

Comparação das idades de duas equipas

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa é de resolução de exercícios e problemas, no entanto, contém uma parte exploratória onde se pretende levar os alunos a reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar, como medida de localização, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão, a amplitude interquartil em vez do desvio padrão. Com esta tarefa também se pretende desenvolver as competências de interpretação das medidas estatísticas e a comunicação dessa informação.

Conhecimentos prévios dos alunos: Quartis, diagrama de extremos e quartis, média e desvio padrão

Materiais e recursos: Calculadora gráfica ou folha de cálculo.

Notas e sugestões:
Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 2 tempos letivos (100 minutos).
Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares e/ou pequenos grupos, para a resolução da tarefa.
A resolução/discussão pode ser dividida em duas partes. No primeiro tempo de 50 minutos podem ser abordadas as duas primeiras questões, e no segundo tempo de 50 minutos as questões restantes. Aparentemente pode parecer que 100 minutos é muito tempo para a exploração desta tarefa, no entanto, deve-se ter em conta que se pretende que os alunos trabalhem a interpretação e a comunicação, o que requer dedicar mais algum tempo à discussão e apresentação das conclusões em grande grupo.

Tarefa 6

Será Cristiano Ronaldo o único outlier da seleção?

1. A tabela 1 apresenta dados referentes a alguns jogadores de futebol que representaram a Seleção Nacional A durante o apuramento para o europeu da Alemanha, a disputar em 2024.

Tabela 1

Jogadores seleção A no apuramento Alemanha 2024			
Nome	Internacionalizações A	Minutos Jogados	*Total de Golos já marcados pela seleção*
Rui patrício	107	9519	0
Diogo Costa	16	1440	0
Danilo	69	4867	2
Pepe	134	11033	8
Raphael Guerreiro	64	4917	4
Ruben Dias	50	4206	2
João Cancelo	46	3609	8
Nelson Semedo	27	1943	0
Nuno Mendes	19	1191	0
Diogo Dalot	14	1171	2
António Silva	5	450	0
Gonçalo Inácio	3	203	2
Bruno Fernandes	59	3861	17
João Mário	56	2976	3
Rúben Neves	42	2309	0
Renato Sanches	32	1363	3
João Palhinha	22	923	2
Octávio	16	790	3
Vitinha	11	340	0
Matheus Nunes	11	261	1
Cristiano Ronaldo	201	15768	123
Bernardo Silva	84	5638	11
Diogo Jota	33	1787	12
João Félix	32	1700	6
Rafael Leão	21	726	3
Ricardo Horta	10	268	3
Gonçalo Ramos	8	275	6
Pedro Neto	4	186	1

Responde às questões seguintes recorrendo a uma calculadora gráfica.

1.1. Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas da variável “Número de golos marcados”. Sempre que procederes a arredondamentos, considera valores aproximados às milésimas.

1.2. Usa a tabela da alínea anterior e indica a percentagem de jogadores que:

1.2.1. não marcou nenhum golo pela seleção;

1.2.2. marcaram menos de dez golos.

1.3. Constrói um gráfico de barras das frequências absolutas acumuladas das internacionalizações. Elabora três questões que possam ser respondidas recorrendo a esse gráfico. Responde a essas questões.

1.4. Por vezes surgem na amostra valores que se distinguem dos restantes por se diferenciarem drasticamente de todos os outros, dando-se-lhes o nome de *outliers*.

Para cada uma das variáveis, quantitativas, apresentadas na tabela 1, identifica, por observação dos dados, os valores suscetíveis de se classificarem como *outliers.*

Um possível aprofundamento

1.5. Existem vários critérios para identificar *outliers*. Um desses critérios consiste em averiguar se o valor está fora do intervalo

$$[Q1 - 1,5\times(Q3 - Q1);\ Q3 + 1,5\times(Q3 - Q1)].$$

Determina os *outliers* relativos à variável "Número de golos marcados", seguindo este critério.

Tarefa 6

Será Cristiano Ronaldo o único outlier da seleção?

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa é de resolução de exercícios e problemas relacionados com a construção e interpretação de tabelas de frequências e gráficos de barras. Tem uma parte exploratória onde se pretende que o aluno consiga intuir a noção de outlier.

Conhecimentos prévios dos alunos: Tabelas de frequências e gráficos de barras.

Materiais e recursos: Folha de cálculo ou calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 3 tempos letivos (150 minutos).

Sugere-se que a atividade seja resolvida recorrendo à tecnologia, incentivando os alunos a construírem a tabela de frequências recorrendo a uma folha de cálculo ou à calculadora gráfica.

Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares e/ou pequenos grupos, para a resolução da tarefa.

A última questão é um possível aprofundamento. Como existem vários métodos para identificar *outliers*, escolheu-se um que utiliza conceitos familiares aos alunos (intervalo de números reais, quartis e amplitude interquartil).

Espera-se que os alunos possam manifestar algumas dificuldades :

- na construção da tabela de frequências acumuladas. Os alunos deverão ser incentivados a preencher as células da tabela de forma automática, explorando as potencialidades da folha de cálculo ou das listas de uma calculadora gráfica.
- na questão de aprofundamento, onde poderá ser necessário recordar a noção de intervalo de números reais.

Tarefa 7

Correlação estatística

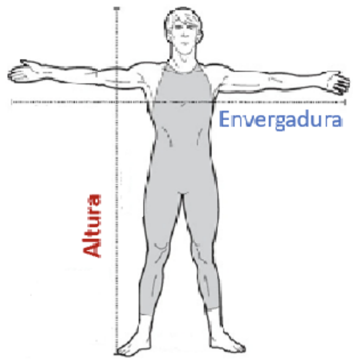
Parte I - Altura versus envergadura (atletas)

Na natação, a altura de um atleta é determinante, e vários estudos indicam que os atletas com maior envergadura têm mais sucesso, por serem capazes de realizar as provas com menor número de braçadas.

Existirá alguma relação/associação entre a altura e a envergadura dos nadadores?

Na tabela seguinte, estão registadas a altura (x, variável independente ou explanatória) e a envergadura (y, variável dependente ou resposta), em centímetros, de alguns dos melhores nadadores mundiais.

Nome do nadador	Altura (x)	Envergadura (y)
Michael Phelps (EUA)	193	203
Diogo Ribeiro (POR)	184	190
Gustavo Borges (BRA)	203	224
Michael Gross (ALE)	201	213
Alexander Popov (RUS)	199	199
Ian Thorpe (AUS)	196	193
César Cielo (BRA)	196	200
David Popovici (ROM)	190	205
Ari-Pekka Liukkonen (FIN)	208	199
Sun Yang (CHN)	198	211
Park Tae-Hwan (KOR)	183	192
Ryan Lochte (EUA)	188	201



1. Representa num diagrama de dispersão os pares de dados da tabela , ou seja, representa num sistema de eixos coordenados, os pontos de coordenadas $(x,\ y)$ correspondentes à altura e à envergadura de cada atleta. Que tendência se observa nos valores da envergadura à medida que os valores da altura aumentam?

2. Com auxílio de uma calculadora gráfica ou folha de cálculo pode obter-se o coeficiente de correlação (linear) que permite quantificar o grau de associação ou correlação de duas variáveis e a equação da reta que melhor se aproxima de todos os pontos do diagrama (reta de regressão).
   Obtém o coeficiente de correlação e a equação reduzida da reta de regressão linear.
   Apresenta o coeficiente de correlação, o declive e a ordenada na origem, arredondados às milésimas.

3. Classifica o tipo e o grau da associação entre as variáveis x e y, a partir da interpretação do valor do coeficiente de correlação.

4. Utiliza a reta de regressão para estimar a envergadura do nadador ucraniano Mykhailo Romanchuk, sabendo que a sua altura é de $1,91$ m.

Parte II - Altura versus envergadura (alunos)

1. Estuda agora a relação entre a altura e a envergadura dos alunos da sua turma.
   Recolhe os dados, constrói o diagrama de dispersão e, recorrendo a uma calculadora gráfica ou folha de cálculo, determina a equação reduzida da reta de regressão e o coeficiente de correlação.
   Apresenta o declive, a ordenada na origem e o coeficiente de correlação arredondados às milésimas.

2. Em qual das amostras de pares de dados a correlação é mais forte? Justifica a tua resposta.

3. Será que existe *em ti* um potencial nadador olímpico? Compara a tua envergadura com o valor estimado para a envergadura de um atleta com a tua altura, atendendo ao modelo obtido.

Parte III - Latitude versus temperatura

A tabela apresenta a informação recolhida sobre a latitude e a temperatura média em janeiro, de catorze capitais europeias:

País	Capital	Latitude(° N)	Temperatura (°C)
Áustria	Viena	48,21	0,3
Bélgica	Bruxelas	50,85	3,3
Chipre	Nicosia	35,16	10,6
Estónia	Talín	59,43	-2,9
Finlândia	Helsínquia	60,17	-3,2
França	Paris	48,85	4,9
Alemanha	Berlim	52,52	0,6
Grécia	Atenas	37,98	10,2
Itália	Roma	41,90	7,5
Letónia	Riga	56,94	-4,7
Malta	Valeta	35,89	12,8
Países Baixos	Amsterdão	52,35	3,4
Portugal	Lisboa	38,73	11,6
Espanha	Madrid	40,42	6,3

1. Constrói um diagrama de dispersão, usando uma calculadora gráfica, que relacione a latitude e a temperatura média em janeiro nestas cidades.

2. Calcula o coeficiente de correlação linear e tendo por base a interpretação desse valor classifica o tipo e o grau da associação linear entre as variáveis.

3. Determina, recorrendo a uma calculadora gráfica, a equação reduzida da reta de regressão.

4. Estima a temperatura média em janeiro de Zagreb, sabendo que se situa a uma latitude aproximada de 45,82°N, recorrendo ao modelo linear determinado na questão anterior.

5. Achas que o modelo de regressão linear a que chegaste é adequado para prever a temperatura no Cairo - capital do Egito? Justifica a resposta.

Tarefa 7

Altura versus envergadura

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa é exploratória tendo como objetivo explorar uma possível associação linear entre a altura e a envergadura de nadadores de alta competição e a altura e envergadura dos alunos da turma.

Conhecimentos prévios dos alunos: Saber representar pontos num referencial cartesiano e saber manusear listas nas calculadoras.

Materiais e recursos: Folha de cálculo e/ou calculadora gráfica e fita métrica

Notas e sugestões:
No primeiro tempo, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares, propondo aos alunos, em seguida, que resolvam a tarefa (parte I), cumprindo as etapas descritas/solicitadas.
O professor irá observando o desempenho dos alunos e fornecendo as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis situações.
No início do segundo tempo, procede-se à medição de todos os alunos com uma pequena ajuda do professor, de forma a uniformizar e sistematizar o processo, sendo distribuídos, posteriormente, todos os dados por todos os alunos da turma.
No terceiro e quarto tempos, efetuar-se-á a discussão e apresentação das conclusões, sendo pedido a diferentes grupos as respostas a cada uma das perguntas. Serão questionados os grupos que obtiverem respostas diferentes, tendo o professor um papel de moderador. Após esta discussão, o professor deverá, com base nas conclusões obtidas por cada aluno no item 3. da parte II, sistematizar diferenças e semelhanças.
Após esta reflexão os alunos procederão à resolução da Parte III, e no final o professor deve também promover a discussão da tarefa.
Os alunos poderão, eventualmente, manifestar algumas dificuldades em:

- conhecer o vocabulário específico, como por exemplo reta de regressão e coeficiente de correlação, …;
- trabalhar com a folha de cálculo/calculadora gráfica, nomeadamente na introdução dos dados que permitem construir os diagramas de dispersão, na obtenção dos diagramas de dispersão, e na determinação do coeficiente de correlação.

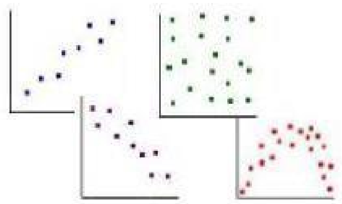
O professor deve igualmente esclarecer as dúvidas relativamente ao vocabulário e manuseio da tecnologia (folha de cálculo e/ou calculadora gráfica), dando ajudas sempre que necessário, de forma que os alunos consigam resolver a tarefa.

No que se refere à questão 5. da Parte III, de acordo com o site https://pt.weatherspark.com/ a latitude do Cairo, Egipto, é 30,063°, valor que não se encontra dentro do intervalo de valores considerados. Assim, o modelo linear obtido não é adequado para prever a temperatura no Cairo.

Tarefa 8

Quarteto curioso

Parte I - Outras relações



Considera as tabelas seguintes, e introduz na calculadora os valores de cada tabela .

x	y_1
10	8,04
8	6,95
13	7,58
9	8,81
11	8,33
14	9,96
6	7,24
4	4,26
12	10,84
7	4,82
5	5,68

x	y_2
10	9,14
8	8,14
13	8,74
9	8,77
11	9,26
14	8,10
6	6,13
4	3,10
12	9,13
7	7,26
5	4,74

x	y_3
10	7,46
8	6,77
13	12,74
9	7,11
11	7,81
14	8,84
6	6,08
4	5,39
12	8,15
7	6,42
5	5,73

x	y_4
8	6,58
8	5,76
8	7,71
8	8,84
8	8,47
8	7,04
8	5,25
19	12,50
8	5,56
8	7,91
8	6,89

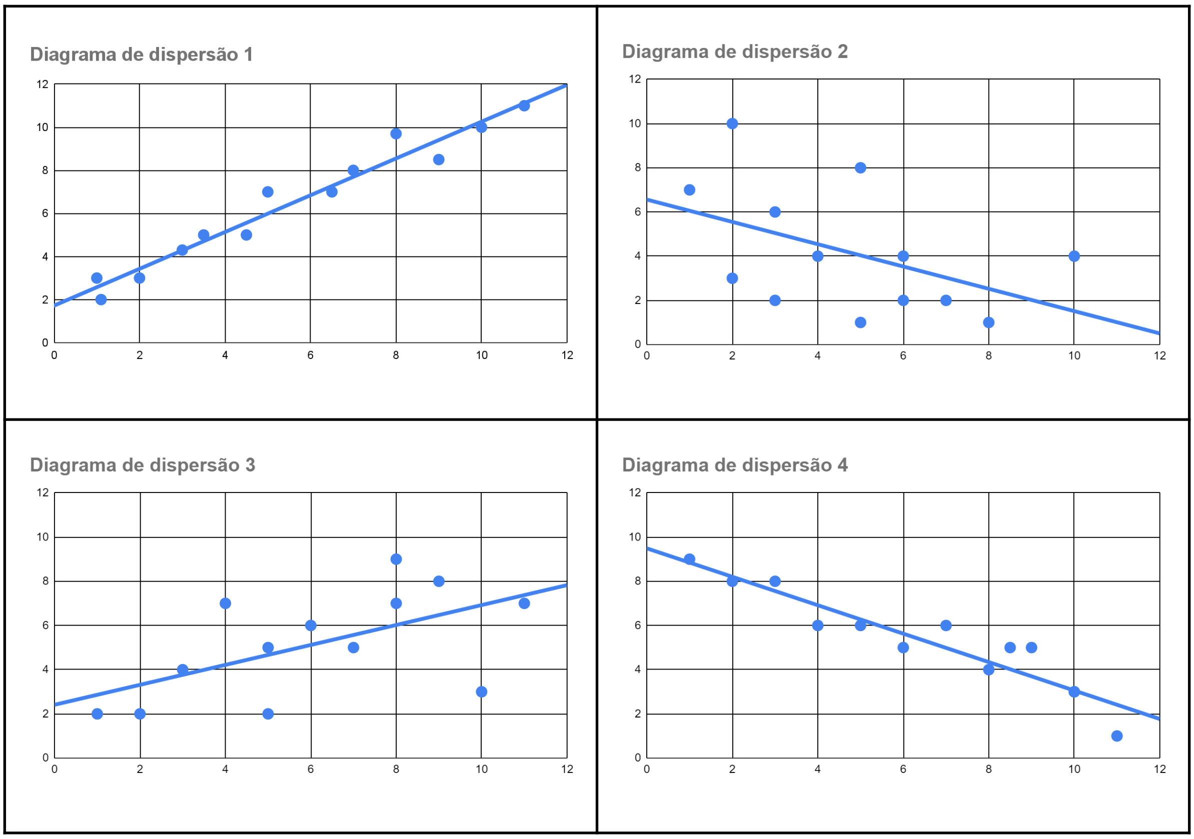
1. Elabora o diagrama de dispersão de cada um dos conjuntos de dados.
   Parece-te razoável usar a correlação linear para descrever todos os casos?

2. Para cada caso, indica a equação reduzida da reta de regressão e o coeficiente de correlação linear. Regista os valores obtidos com aproximação à milésima. Reflete sobre os resultados obtidos, nomeadamente sobre o que observaste nos diagramas de dispersão.

3. Faz uso das diversas regressões disponíveis na calculadora gráfica e/ou folha de cálculo para descrever uma possível associação entre as variáveis, e indica para cada caso, qual te parece ser a que melhor a descreve?

Parte II - Outro quarteto

Considera os seguintes diagramas de dispersão e as respetivas retas de regressão, que representam quatro conjuntos de dados:



Foram calculados os coeficientes de correlação dos dados representados em cada um dos diagramas de dispersão anteriores.

Os valores encontrados são os seguintes e não seguem a mesma ordem dos diagramas:

A = -0,47 B = -0,95 C = 0,98 D = 0,58

Associa a cada diagrama de dispersão o coeficiente de correlação que lhe corresponde.

Tarefa 8

Quarteto curioso

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

O quarteto de Anscombe são quatro conjuntos de dados que têm medidas estatísticas quase idênticas, como a média e a variância, mas que têm distribuições muito diferentes e aparências muito distintas quando exibidos graficamente.
Cada conjunto de dados consiste em onze pontos (x,y) e foram obtidos em 1973 pelo estatístico Francis Anscombe, com o objetivo de demonstrar tanto a importância de se visualizar os dados antes de analisá-los, quanto o efeito dos *outliers* e outras observações influentes nas propriedades estatísticas.
O quarteto é usado frequentemente para ilustrar a importância de visualizar um conjunto de dados graficamente antes de iniciar a análise de acordo com um tipo de relação particular.

Conhecimentos prévios dos alunos: Saber representar pontos num referencial cartesiano e identificar possíveis correlações, bem como saber manusear listas nas calculadoras.

Materiais e recursos: Folha de cálculo e/ou calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

Os alunos iniciarão a aula com a resolução da tarefa, cumprindo as etapas descritas/solicitadas.
O professor irá observando o desempenho dos alunos e fornecendo as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis situações.
No final, depois de responder à parte II, efetuar-se-á a apresentação das resoluções, sendo pedido a diferentes grupos o seu contributo para as conclusões, tendo o professor um papel de moderador. Os alunos poderão, eventualmente, manifestar algumas dificuldades em:

o conhecer o vocabulário específico, como por exemplo reta de regressão e coeficiente de correlação, …;

o trabalhar com a folha de cálculo/calculadora gráfica, nomeadamente na introdução dos dados que permitem construir os diagramas de dispersão, na obtenção dos diagramas de dispersão e na determinação do coeficiente de correlação.

Apesar dos diversos conjuntos de dados apresentarem diagramas de dispersão muito díspares, têm a mesma reta de regressão e coeficientes de correlação muito próximos. A forma do diagrama de dispersão sugere que só um dos 4 conjuntos de dados, o 3º, é efetivamente bem representado por uma regressão linear.

Na terceira tabela existe um valor que contrasta com os restantes dados (13;12,74) o qual é responsável pelos valores obtidos na regressão.

Tarefa 9

Correlação não é relação causa-efeito

A tabela apresenta-nos os dados relativos ao número de acidentes de trabalho mortais e o número de camas especializadas nos hospitais, por 100 mil habitantes:

Ano	N.º de acidentes de trabalho mortais, por 100 mil habitantes	N.º de camas especializadas nos hospitais, por 100 mil habitantes
2001	7,10	43,20
2002	6,90	37,60
2003	6,10	34,60
2004	6,00	39,40
2005	5,90	34,50
2006	5,00	32,20
2007	5,40	29,60
2008	4,50	26,10
2009	4,40	24,10
2010	4,20	29,00
2011	4,00	29,80
2012	4,10	20,90
2013	4,00	22,10
2014	3,70	22,40
2015	3,70	20,90
2016	3,10	20,50
2017	3,00	20,60
2018	2,00	21,90
2019	2,20	18,90
2020	2,80	19,00
2021	1,90	18,40

Dados recolhidos no Pordata, disponíveis em: https://www.pordata.pt/

1. Constrói o gráfico de dispersão. Existe algum tipo de associação entre as duas variáveis?

2. Determina o coeficiente de correlação entre as duas variáveis.

3. Comenta a seguinte afirmação:
"Existe uma relação de causa-efeito entre as duas variáveis em estudo."

4. Considera as associações existentes entre os seguintes pares de variáveis.

4.1. As variáveis “Vendas de Guarda-Chuvas” e “Acidentes de Trânsito”, estão fortemente associadas (coeficiente de correlação próximo de 1).
Será que ao comprar um guarda chuva, estou a aumentar a probabilidade de provocar um acidente de trânsito?
Como se explica o valor do coeficiente de correlação?

4.2. As variáveis “Consumo de gelados” e “Afogamentos”, em locais à beira-mar, estão fortemente associadas.
Quando comer um gelado aumenta o risco de me afogar?
Explica porque razão o valor do coeficiente de correlação é elevado.

Tarefa 9

Correlação não é relação causa-efeito

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
A tarefa tem como objetivo levar os alunos a refletir se o coeficiente de correlação nos permite sempre estabelecer uma relação de causa-efeito entre duas variáveis.

Conhecimentos prévios dos alunos: Dados bivariados.

Materiais e recursos: Folha de cálculo

Notas e sugestões:
Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de um tempo letivo (50 minutos).
Num primeiro momento, far-se-á a organização dos alunos em pares, para a resolução da tarefa. Propõe-se 35 minutos para a sua resolução e o restante tempo para discussão e apresentação das conclusões no grupo turma.
O professor irá observando o desempenho dos alunos e fornecendo as ajudas necessárias, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo, de forma a desbloquear possíveis situações.
Espera-se que os alunos possam manifestar algumas dificuldades na formulação de conjeturas a partir dos resultados obtidos.
Para um possível aprofundamento, propõe-se a consulta dos exemplos ilustrados no site: https://tylervigen.com/spurious-correlations, com objetivo dos alunos observarem exemplos de associações entre variáveis com um coeficiente de correlação elevado (em módulo), sem que exista uma relação causa-efeito entre as variáveis.